中華民國一九九八年數學奧林匹亞選訓營模擬試題及參考解答

中華民國數學奧林匹亞委員會

一、引言：

中華民國爲參加1998年7月10日～21日，在我國台北市國立臺灣師範大學舉行的第39屆國際數學奧林匹亞競賽的活動，已在中華民國數學奧林匹亞委員會主辦及中華民國數學會與國立臺灣師範大學協辦下，於3月29日～4月6日及4月20日～4月26日在國立臺灣師範大學理學院先後完成兩個階段國家代表隊的選訓營．在第一階段的選訓營中共有來自全國各地的20名高中生獲得推薦參加；在此階段中，選訓小組提供了十二個專題探討，分別聘請專家或教授擔任主講的工作，且爲了考核學生的成績，選訓小組共舉辦了三次的模擬競試（每次佔決選成績的12%，共佔36%，每次三道試題）與六次的獨立研究（每次佔決選成績的2%，共佔12%，每次兩道試題）．此外，在本階段的評分中，尙含有亞太數學奧林匹亞競賽的成績，佔6%，及個別評量與口試，佔6%，總計佔國家代表隊決選成績的60%，並依據此成績選拔出其中的十位學生參加第二階段的選訓營．在第二階段的選訓營中，選訓小組也提供了十二個更深入的專題探討，兩次的模擬競試（每次佔決選成績的12%，共佔24%，每次三道試題）與六次的獨立研究（每次佔決選成績的2%，共佔12%，每次兩道試題），及個別評量與口試，佔4%，總計佔國家代表隊決選成績的40%．依據最後決選的總成績選拔出六位正選國手（建國中學陳明揚，高雄中學廖健溢，台南一中賴信弘，師大附中王世豪，武陵高中游志強，台南一中劉育廷）及一位候補國手（台中一中林宗茂），並隨即展開六週的國手加強訓練．以下我們針對整個國手選訓營中五次模擬競試的十五道試題提出詳細的參考解答，以作爲教師輔導與資優教學的參考．事實上，所有參賽的學生在這十五道模擬試題的得分平均值（滿分7分）依序爲4.65分，6.10分，6.30分，3.95分，0.70分，1.60分，6.95分，1.60分，1.75分，5.60分，5.60分，5.20

分, 6.40 分, 3.10 分, 6.80 分. 由此統計資料可以看出我國高中數學資優生仍有一些需要再進一步加強的數學領域. 在本單元的最後一部分, 我們將附錄列出整個國手選訓營中的24道獨立研究試題, 以供有興趣於數學的資優學生研究.

二、一九九八年中華民國數學奧林匹亞選訓營模擬試題

一九九八年數學奧林匹亞選訓營
第一階段模擬試題(一)

1998年3月31日 9:00 - 13:30

問題1 : 設 $\langle p_n\rangle$ 爲一數列, 其中 $p_1 = 2$, 當 $n > 1$ 時, p_n 爲 $1 + p_1p_2\cdots p_{n-1}$ 的最大質因數.

(a) 證明 : $\langle p_n\rangle$ 中沒有一項爲5 ;

(b) 試問 : $\langle p_n\rangle$ 中是否有一項爲11 ?

問題2 : 在銳角 $\triangle ABC$ 的外側, 分別以 BC 、 CA 與 AB 爲邊作正五邊形 $BCD_1E_1F_1$ 、 $CAD_2E_2F_2$ 與 $ABD_3E_3F_3$. 證明 : AE_1 、 BE_2 、 CE_3 三線共交點.

問題3 : 設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲實數 $(n \geq 2)$, 而且

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i| = 1 \ , \ \sum_{i=1}^{n}x_i = 0.$$

證明 :

$$|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}| \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

一九九八年數學奧林匹亞選訓營
第一階段模擬試題(二)

1998年4月3日 9:00 - 13:30

問題4 : 設 a, b, c, d 都是實數且滿足

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d > 0, \ \forall\, x \geq 0.$$

證明: 存在一正整數 n, 使得多項式

$$(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)(1 + x)^n$$

展開後的每一項係數都是正數.

問題5：設I爲$\triangle ABC$的內心，直線AI, BI, CI分別交$\triangle ABC$的三邊於D, E, F，且$X \in \overline{EF}, Y \in \overline{FD}, Z \in \overline{DE}$. 證明：

$$d(X, AB) + d(Y, BC) + d(Z, CA) \leq \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX}.$$

（其中$d(X, L)$表示點X到直線L的距離）

問題6：(a) 試問是否存在函數$f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, 使得

$$f(g(x)) = x^3 \quad \text{且} \quad g(f(x)) = x^4, \ \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

(b) 設n爲正整數，試問是否存在函數$f, g : (1, \infty) \longrightarrow (1, \infty)$滿足

$$f(g(x)) = x^n \quad \text{且} \quad g(f(x)) = x^{(n^n)}, \ \forall\, x > 1.$$

一九九八年數學奧林匹亞選訓營
第一階段模擬試題（三）
1998年4月4日　9:00 - 13:30

問題7：證明滿足下列等式的正整數解(a, b, c, d)有無限多組：

$$\sqrt{a - b\sqrt{2}} + \sqrt{c - d\sqrt{2}} = 1.$$

問題8：試確定不定方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = xyzuv - 65$$

是否有一組都超過1998的整數解(x, y, z, u, v)？

問題9：把編號$1, 2, 3, \cdots, n (n \geq 3)$的同學重新排成一列，但絕對不容許下列情況發生：對於任意三個編號i, j, k的同學（其中$i < j < k$），

(a) j號學生排在i號學生之前，且

(b) i號學生排在k號學生之前.

試問有多少種這樣的排列法？

一九九八年數學奧林匹亞選訓營
第二階段模擬試題（四）
1998年4月25日　9:00 - 13:30

問題10：已知O爲ΔABC的外心，$\overline{AC} > \overline{BC} > \overline{AB}$，而點$D, E$分別在$\overline{AC}, \overline{BC}$上，且滿足$\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BE}$. 設$F$爲$\angle ABC$的內角平分線與$\overline{AC}$的交點，$G$爲$\angle BAC$的內角平分線與$\overline{BC}$的交點；$\overline{AO}$分別與直線$EF, DG$交於$P, Q$，且$\overline{BO}$分別與直線$EF, DG$交於$R, S$. 證明：$P, Q, R, S$四點共圓.

問題11：設$f(x) = x^{1998} + 2x^{1997} + 3x^{999} + 2x + 1$，且定義

$$A = \{(x, y)\ ;\ x, y \text{ 都是正整數，且 } x|f(y),\ y|f(x)\}\ .$$

(a) 證明：若$(a, b) \in A$，則$(b, \frac{f(b)}{a}) \in A$；

(b) 集合A的元素的個數是否有限，爲什麼？

問題12：設N表示全體正整數集合. 試確定所有滿足下列條件的函數f：

(1) $f : N \longrightarrow N$ 且 $f(3) = 9$；

(2) 若$m, n \in N, m < n$，則$f(m) < f(n)$；

(3) 若$m, n \in N$，則$f(mn) = f(m)f(n)$.

一九九八年數學奧林匹亞選訓營
第二階段模擬試題（五）

1998年4月26日　9:00 - 13:30

問題13：試確定具有下列性質的所有正整數n：

對任一整係數多項式$f(x)$，當它滿足$f(k) \cdot f(1998) \geq 0$，且$|f(k)| \leq n$, $\forall k = 0, 1, 2, \cdots, 1998$時，恆有

$$f(0) = f(1) = f(2) = \cdots = f(1998)\ .$$

問題14：設$a, b > 0$，且

$$A_n = \frac{n}{\sqrt{a(a+nb)}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a+kb},\ n = 1, 2, 3, \cdots\ .$$

試確定所有的正整數n，使得$A_n > 0$.

問題15：對任一正整數n，令$w(n)$表示所有可整除n的正質數之個數. 試求出最小的正整數k，使得對每一正整數n，恆有

$$2^{w(n)} \leq k\sqrt[4]{n}\ .$$

三、一九九八年中華民國數學奧林匹亞選訓營模擬試題參考解答

[問題1參考解答]:

顯然, $p_2=3, p_3=7, p_4=43$, 且當 $n\geq 5$ 時, $1+p_1p_2\cdots p_{n-1}$ 都不會有2,3,7爲因數.

(a) 若存在 n 使得 $p_n=5$, 則

$$1+p_1p_2\cdots p_{n-1}=5^k,\ k\in N.$$

因此, $4|p_1p_2\cdots p_{n-1}$. 得知某一 p_i 是偶數, 矛盾!

(b) 若存在 n 使得 $p_n=11$, 則

$$1+p_1p_2\cdots p_{n-1}=5^a\cdot 11^b,\ a\in N\cup\{0\}, b\in N.$$

因此, $1\equiv 2^{a+b}\pmod 3$, 得 $a+b$ 是一偶數. 若 a,b 同爲偶數, 則 $1+p_1p_2\cdots p_{n-1}=5^{2c}\cdot 11^{2d}$. 故

$$p_1p_2\cdots p_{n-1}=(5^c\cdot 11^d+1)(5^c\cdot 11^d-1).$$

可知 $4|p_1p_2\cdots p_{n-1}$. 於是得某一 p_i 是偶數, 矛盾! 若 a,b 同爲奇數, 則

$$1+p_1p_2\cdots p_{n-1}=5^{2c+1}\cdot 11^{2d+1}.$$

故 $1\equiv 55(5^c\cdot 11^d)^2\pmod 7$. 即 $6\equiv -1\equiv (5^c\cdot 11^d)^2\pmod 7$. 但 $k^2\equiv 0,1,2,$ 或 $4\pmod 7$, $\forall k\in N$, 矛盾! 故不存在 n 使得 $p_n=11$.

[問題2參考解答]:

設 BC,CA,AB 的邊長分別爲 a,b,c, 而 ΔABC 的面積爲 S. 令正五邊形頂點至底邊的距離爲其邊長的 k 倍, 設 P 爲 AE_1 與 BC 的交點, Q 爲 BE_2 與 CA 的交點, R 爲 CE_3 與 AB 的交點, M 爲 BC 的中點, H 爲 A 對邊 BC 的垂足. 則 $E_1M=ka$, 且 $AH=b\sin C$. 因此, (由 $\Delta APH\sim\Delta E_1PM$)

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BM+MP}{HC+PH}=\frac{\frac{1}{2}a+\frac{ka}{ka+b\sin C}(\frac{1}{2}a-b\cos C)}{b\cos C+\frac{b\sin C}{ka+b\sin C}(\frac{1}{2}a-b\cos C)}$$

$$=\frac{ka^2+\frac{1}{2}ab\sin C-kab\cos C}{\frac{1}{2}ab\sin C+kab\cos C}=\frac{S+kca\cos B}{S+kab\cos C}.$$

同理,

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{S+kab\cos C}{S+kbc\cos A},\ \frac{AR}{RB}=\frac{S+kbc\cos A}{S+kca\cos B}.$$

因此,

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$$

由西瓦定理知，AE_1、BE_2、CE_3三線共交點。

註明：也可用面積比直接導出

$$\frac{BP}{PC}=\frac{\Delta ABE_1}{\Delta ACE_1}=\frac{c\sin(B+72^o)}{b\sin(C+72^o)}.$$

[問題3參考解答]：

令

$$S_k=x_1+x_2+\cdots+x_k,\ \forall\ k=1,2,\cdots,n,$$

$$T_m=x_m+x_{m+1}+\cdots,x_n,\ \forall\ m=1,2,\cdots,n.$$

則$S_n=0$，不妨設$S_0=0$. 對於$1\le i\le n-1$，因爲$S_i+T_{i+1}=0$，得

$$|S_i|=|T_{i+1}|\le\sum_{k=i+1}^{n}|x_i|=1-\sum_{j=1}^{i}|x_j|\le 1-|S_i|.$$

所以，$|S_i|\le\frac{1}{2}$. 因此，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i-S_{i-1}}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{i}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{i+1}=\sum_{i=1}^{n-1}S_i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right).$$

故

$$|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}|\le\sum_{i=1}^{n-1}|S_i|\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

[問題4參考解答]：

令$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. 則$f(x)>0,\ \forall x\ge 0$. 因此，方程式$f(x)=0$沒有非負根. 故將$f(x)$因式分解可得

$$f(x)=(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4),$$

或

$$f(x)=(x+x_1)(x+x_2)(x^2-px+q),$$

或

$$f(x)=(x^2-p_1x+q_1)(x^2-p_2x+q_2).$$

其中$x_i>0, p^2<4q, p_i^2<4q_i$. 因爲兩個正係數的多項式之乘積還是一個正係數的多項式，故欲證明原問題，我們只需處理每一無實根的二次多項式$Q(x)=x^2-px+q$之情況即可，其中$p^2<4q$. 對任一正整數n，利用二項式定理，我們有

$$Q(x)(1+x)^n = (x^2 - px + q)\sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n+2}[C_{k-2}^n - pC_{k-1}^n + qC_k^n]x^k.$$

令係數

$$a(n,k) := C_{k-2}^n - pC_{k-1}^n + qC_k^n,\ k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n+2.$$

我們要證明每一$a(n,k) > 0$. 顯然, $a(n,0) = q > \frac{1}{4}p^2 \geq 0$, $a(n, n+2) = 1$. 又當n足夠大時, $a(n,1) = qn - p, a(n,n+1) = n - p$都是正數. 對其他$k \in \{2,3,4,\cdots,n\}$, 將$a(n,k)$改寫成

$$a(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k+2)!}[Ak^2 - (Bn+C)k + q(n^2+3n+2)],$$

其中$A = 1+p+q, B = p+2q, C = 1+2p+3q$. 令

$$\alpha = q - \frac{B^2}{4A},\quad \beta = 3q - \frac{2BC}{4A},\quad \gamma = 2q - \frac{C^2}{4A},$$

則有

$$a(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k+2)!}[A(k - \frac{Bn+C}{2A})^2 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma].$$

因爲$A = 1+p+q = Q(-1) > 0$, 且

$$\alpha = q - \frac{B^2}{4A} = \frac{4q-p^2}{4A} > 0,$$

故對足夠大的n, 恆有$a(n,k) > 0$, 得證.

[問題5參考解答]:

首先, 我們證明:

$$d(X,BC) = d(X,AB) + d(X,AC).$$

不失一般性, 令$d(F,BC) \leq d(E,BC)$, 且

$$FX = k \cdot FE \quad , \quad 0 \leq k \leq 1.$$

當$k = 0$或1時, 欲證明之等式顯然成立, 故設$k \in (0,1)$. 由平行線截線段成比例的性質, 得

$$\frac{k}{1} = \frac{FX}{FE} = \frac{d(X,BC) - d(F,CB)}{d(E,BC) - d(F,BC)},$$

故

$$d(X,BC) = k \cdot [d(E,BC) - d(F,BC)] + d(F,BC). \tag{1}$$

同理，由$d(X,AB) : d(E,AB) = k : 1$, 得

$$d(X,AB)=k\cdot d(E,AB). \tag{2}$$

由 $d(X,AC):d(F,AC)=(1-k):1$,得

$$d(X,AC)=(1-k)\cdot d(F,AC). \tag{3}$$

又因爲 BE 爲 $\angle ABC$ 的平分線，故 $d(E,BC)=d(E,AB)$. 同理，$d(F,AC)=d(F,BC)$. 故由(1)(2)(3)式可得

$$\begin{aligned} & d(X,BC)-d(X,AB)-d(X,AC) \\ &\quad = k\cdot[d(E,BC)-d(E,AB)]+(k-1)\cdot[d(F,AC)-d(F,BC)], \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

(5)

因此,

$$d(X,AB)=d(X,BC)-d(X,CA). \tag{6}$$

同理，

$$d(Y,BC)=d(Y,CA)-d(Y,AB). \tag{7}$$

$$d(Z,CA)=d(Z,AB)-d(Z,BC). \tag{8}$$

將(4)(5)(6)式相加得

$$\begin{aligned} & d(X,AB)+d(Y,BC)+d(Z,CA) \\ &= [d(X,BC)-d(X,CA)]+[d(Y,CA)-d(Y,AB)]+[d(Z,AB)-d(Z,BC)] \\ &= [d(Y,CA)-d(X,CA)]+[d(Z,AB)-d(Y,AB)]+[d(X,BC)-d(Z,BC)] \\ &\le XY+YZ+ZX. \end{aligned}$$

[問題6參考解答]:

(a)假設存在函數 f 及 g 滿足(a)之條件. 則對 $x,y\in R$, 當 $x\neq y$ 時, 由條件知 $g(x)\neq g(y)$. 故 $g(0),g(1),g(-1)$ 爲三相異實數. 又

$$g(x^3)=g(f(g(x)))=(g(x))^4.$$

令 $x=0,1,-1$ 分別代入上式得知

$$g(0),g(1),g(-1)$$

爲方程式 $x^4=x$ 的三相異實根. 但 $x^4=x$ 僅有兩相異實根0及1, 矛盾!

(b)對任意的正整數 n, 我們可取

$$f(x) = 2^{n(\log_2 x)^{\frac{1}{n}}}, \quad g(x) = 2^{(\log_2 x)^n}, \ \forall\, x > 1.$$

則易知此兩函數滿足(b)之條件.故對任意的正整數n,本命題均成立.

[問題7參考解答]:

設a, b, c, d爲一解.因爲

$$\sqrt{c - d\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{a - b\sqrt{2}},$$

兩邊平方整理後,可得

$$\sqrt{a - b\sqrt{2}} = \frac{1 + a - c + (d - b)\sqrt{2}}{2}$$

令$1 + a - c = 2m, d - b = 2n$,其中$m, n \in Q$,且$2m, 2n \in Z$.故

$$\sqrt{a - b\sqrt{2}} = m + n\sqrt{2}.$$

兩邊再平方後,得

$$a - b\sqrt{2} = m^2 + 2n^2 + 2mn\sqrt{2}.$$

比較係數,得$a = m^2 + 2n^2, b = -2mn = \frac{-1}{2}(2m)(2n)$.因爲$b, 2m, 2n$都是整數,故$m$或$n$中至少有一爲整數.當$m$爲整數時,由$a - m^2 = \frac{1}{2}(2n)^2$,知$(2n)^2$是偶數.故$2n$也是偶數,得知$n$是整數.同理,當$n$爲整數時,由$a - 2n^2 = m^2 = \frac{1}{4}(2m)^2$,知$2m$是偶數,得$m$是整數.於是, m, n都是整數.又因爲

$$0 \le \sqrt{a - b\sqrt{2}} = m + n\sqrt{2} \le \sqrt{a - b\sqrt{2}} + \sqrt{c - d\sqrt{2}} = 1,$$

所以, $0 \le m + n\sqrt{2} \le 1$.

(i)當$n = 0$時, $m = 0$或1.當$m = 0$,得$(a, b, c, d) = (0, 0, 1, 0)$;當$m = 1$,得$(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 0)$.

(ii)當$n \neq 0$時, $0 \le m + n\sqrt{2} < 1$.故$[m + n\sqrt{2}] = 0$,得$m = -[n\sqrt{2}]$.因此,

$$a = m^2 + 2n^2 = 2n^2 + [n\sqrt{2}]^2$$

$$b = -2mn = 2n \cdot [n\sqrt{2}]$$

$$c = 1 + a - 2m = 2n^2 + (1 + [n\sqrt{2}])^2$$

$$d = b + 2n = 2n(1 + [n\sqrt{2}]).$$

將(i)與(ii)的結果代入原式檢驗均符合.故所求之解集合爲:

$$\{(2n^2 + [n\sqrt{2}]^2, 2n \cdot [n\sqrt{2}], 2n^2 + (1 + [n\sqrt{2}])^2, 2n(1 + [n\sqrt{2}]));\ n \in Z\}$$

$$\bigcup \ \{(1,0,0,0), (0,0,1,0)\}.$$

[問題8參考解答]：

首先,直接檢驗可知$(1,2,3,4,5)$爲一解.由已知條件知:

$$x^2-(yzuv)x+(y^2+z^2+u^2+v^2+65)=0.$$

則當(x_1,y_1,z_1,u_1,v_1)爲其一解時,利用根與係數的關係,

$$(y_1z_1u_1v_1-x_1,y_1,z_1,u_1,v_1)$$

亦爲其一組解.故由$(1,2,3,4,5)$爲一解,可得另一組解

$$(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5-1,2,3,4,5)=(119,2,3,4,5).$$

由於原不定方程爲一對稱式,故由對稱性知:

$$(2,3,4,5,119)$$

亦爲其一組解.因此,可再推得另一組解

$$(3\cdot 4\cdot 5\cdot 119-2,3,4,5,119)=(7138,3,4,5,119).$$

由對稱性知:

$$(3,4,5,119,7138)$$

亦爲其一組解.如此循續進行可知

$$(7138,4\cdot 5\cdot 119\cdot 7138-3,\ a,\ b,\ c)$$

亦爲其一組解,其中

$$a=5\cdot 119\cdot 7138\cdot(4\cdot 5\cdot 119\cdot 7138-3)-4,$$

$$b=119\cdot 7138\cdot(4\cdot 5\cdot 119\cdot 7138-3)\cdot a-5,$$

$$c=7138\cdot(4\cdot 5\cdot 119\cdot 7138-3)\cdot a\cdot b-119.$$

此解的每一數都超過1998,故得證原不定方程有一組都超過1998的整數解(x,y,z,u,v).

[問題9參考解答]：

令排在x號學生之後而且編號小於x的學生人數爲$f(x)$,當然$0\le f(x)\le x-1$..如果$1\le i<j\le n-1$,而且$f(i)<f(j)$,則j號學生排在i號學生之前.由條件$j+1$號學生不能排在i號學生之後,故$f(i)<f(j+1)$,所以$f(j+1)\ge f(j)$.也就是說f是從$\{1,2,\cdots,n\}\to\{0,1,\cdots,n-1\}$的遞增函數,而且

$$f(x)\le x-1,\ \forall\ x. \qquad (*)$$

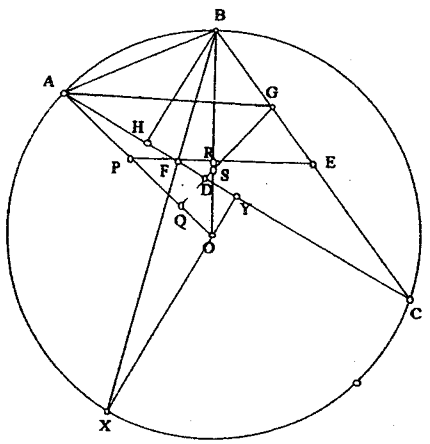
反之,若給定一個遞增函數$f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{0,1,\cdots,n-1\}$,且$f(x)\le x-1$,我們先排編號1的學生,接著,依續把編號$2,\cdots,i-1$, $(2<i\le n-1)$,的學生先排好,再把第

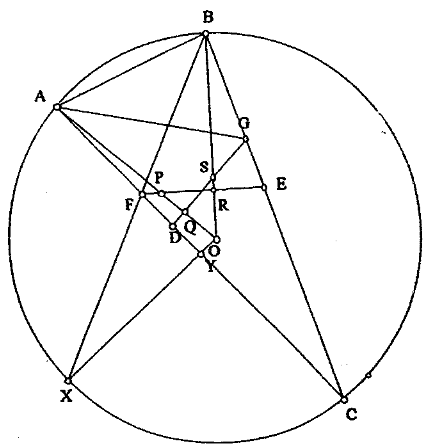
i 號學生排在從後面已排好的學生算過來的第 $f(i)+1$ 個位置,最後再排第 n 號學生,例如: $f(1)=0, f(2)=1, f(3)=2, f(4)=2, f(5)=4, f(6)=5$,則其排法爲 $6,5,3,4,2,1$. 如果存在有 i,j,k $(i<j<k)$,使得 j 號學生排前,i 號學生排中間, k 號學生排在後面,則可以找到編號 $\ell, \ell+1 (\ell > i)$ 的二個學生,使得 ℓ 號學生排在 i 號學生之前, $\ell+1$ 號學生在 i 號學生之後,這樣產生 $f(\ell) > f(\ell+1)$ 的矛盾!又滿足條件 $(*)$ 的函數共有 $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 個(即 Catalan 數),故滿足題意的排法有 $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 種.

[問題10參考解答]:

(a) 設 ΔABC 爲鈍角三角形,如左下圖. 令 X 爲直線 BF 與外接圓 O 的交點. 因爲 $\angle ABF = \angle FBE$, 故 $AX = CX$. 得知 AC 與 XO 垂直,設垂直點爲 Y. 因 $AB = BE$, 故 $\Delta ABF \cong \Delta EBF$ (SAS 性質). 可得 $\angle AFB = \angle BFE$. 設 BH 垂直 AC 於 H. 則 BH 與 XY 平行, 得 $\angle HBF = \angle BXY$. 又因 $OB = OX$, 得 $\angle HBF = \angle BXO = \angle XBO$. 故 $\Delta BRF \cong \Delta BHF$ (ASA 性質). 於是, $\angle BRF = \angle BHF = 90^o$, 即 BO 與 EF 垂直於 R. 同理, AO 與 DG 垂直於 Q. 得 $\angle PQS + \angle PRS = 180^o$, 因此, P,Q,S,R 四點共圓.

(b) 設 ΔABC 爲銳角三角形,如右下圖. 同 (a) 的證明過程可得 $\angle PQS = \angle PRS = 90^o$. 故 P,Q,R,S 四點共圓.





[問題11參考解答]:

(a) 若 $(a,b) \in A$, 則 $a|f(b)$. 令 $c = \frac{f(b)}{a}$, 得 c 爲一正整數, 且 $c|f(b)$. 故欲證 $(b, \frac{f(b)}{a}) \in A$, 我們只需再證 $b|f(c)$. 因爲

$$b|f(a) = a^{1998} + 2a^{1997} + 3a^{999} + 2a + 1,$$

可知 a 與 b 是互質的. 故有一整數 z 使得 $az \equiv 1 \ (mod\ b)$. 又由 $f(b) \equiv 1 \ (mod\ b)$, 可得

$$f(c) \equiv f(\frac{f(b)}{a}) \equiv f(zf(b)) \equiv f(z) \quad (mod\ b).$$

因爲 $b|f(a)$, 且 $a^{1998} f(\frac{1}{a}) = f(a)$, 故

$$a^{1998}f(z) \equiv a^{1998}f(\frac{1}{a}) \equiv f(a) \equiv 0 \pmod b.$$

因此,利用a與b互質得$f(c) \equiv f(z) \equiv 0 \ (mod\ b)$. 即$b|f(c)$.

(b) 若$(a,b) \in A$, 且$a < b$,則由(a)知$(b, \frac{f(b)}{a}) \in A$, 且

$$b \le \frac{b^2}{a} < \frac{b^{1998}+1}{a} \le \frac{f(b)}{a}.$$

又顯然, $(1, f(1)) \in A$, 且$1 < f(1)$. 因此,由$(1, f(1)) \in A$開始,我們可由(a)的過程構造出無限多個A的相異元素.

[問題12參考解答]:

我們要證明$f(n) = n^2$, $\forall\, n \in N$.

(1) 顯然, $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$. 由$f(1) > 0$, 得$f(1) = 1 = 1^2$.

(2) 因爲$f(2)^2 = f(4) > f(3) = 9$, 得$f(2) > 3$. 又因

$$f(2)^3 = f(8) < f(9) = f(3)^2 = 81,$$

得$f(2) < \sqrt[3]{81} < 5$, 故$f(2) = 4 = 2^2$.

(3) 設$f(k) = k^2$, $\forall\, k \le n$都成立 $(n \ge 3)$. 則由已知條件可得:當正整數m的質因數都小於n時, $f(m) = m^2$. 當$n+1$爲合數時,令$n+1 = ab$, 其中$a, b \in N, 2 \le a, b \le n$. 得

$$f(n+1) = f(ab) = f(a)f(b) = a^2b^2 = (n+1)^2.$$

當$n+1$爲質數時, $n, n+2$都是合數,且質因數都小於n. 因此,

$$f(n+1)^2 = f((n+1)^2) > f(n(n+2)) = f(n)f(n+2) = n^2(n+2)^2.$$

故$f(n+1) > n(n+2)$. 於是, $f(n+1) \ge n(n+2)+1 = (n+1)^2$. 另一方面,假設$f(p) \ge p^2+1$, 其中$p = n+1$爲質數. 令$a \in N$使得

$$2^a \le p^{2p^2} < 2^{a+1}.$$

則

$$(p^2+1)^{p^2} > (p^2)^{p^2} + C_1^{p^2} \cdot (p^2)^{p^2-1} = 2p^{2p^2} \ge 2^{a+1}. \tag{1}$$

又因爲

$$[f(p)^{p^2}]^2 = f(p)^{2p^2} = f(p^{2p^2}) < f(2^{a+1}) = (2^{a+1})^2,$$

所以

$$(p^2+1)^{p^2} \le f(p)^{p^2} < 2^{a+1}. \tag{2}$$

顯然, (1) 與 (2) 矛盾! 故 $f(p) < p^2+1$, 即 $f(n+1) < (n+1)^2+1$. 得 $f(n+1) \leq (n+1)^2$. 因此, $f(n+1) = (n+1)^2$.

綜合上述結果, 我們得證 $f(n) = n^2,\ \forall\, n \in N$.

[問題13參考解答]:

我們將證明對所有的正整數 $n \leq 1997$ 都合乎條件.

(a) 設 $n \leq 1997$. 對 $k = 0, 1, 2, \cdots, 1998$, 因為 $|f(k)| \leq n \leq 1997$, 且 $f(k)$ 與 $f(1998)$ 同號, 故

$$|f(k) - f(1998)| \leq 1997,\ \forall\, k = 0, 1, 2, 3, \cdots, 1998.$$

得 $|f(0) - f(1998)| \leq 1997$. 又因 $f(1998) - f(0)$ 可被 1998 整除, 故 $f(1998) = f(0)$. 因此, 可得

$$f(x) - f(1998) = x(x-1998)g(x), \tag{1}$$

其中 $g(x)$ 為一整係數多項式. 對 $k \in \{2, 3, 4, \cdots, 1996\}$, 我們有

$$1997 \geq |f(k) - f(1998)| = k(1998-k)|g(k)| > 1997|g(k)|.$$

故

$$g(k) < 1,\ \forall\, k = 2, 3, 4, \cdots, 1996.$$

由於 $g(k)$ 是整數, 得 $g(k) = 0, \forall k = 2, 3, \cdots, 1996$. 因此, $f(x)$ 可以被表成

$$f(x) - f(1998) = x(x-2)\cdots(x-1996)(x-1998)h(x), \tag{2}$$

其中 $h(x)$ 亦為一整係數多項式. 欲證

$$f(i) = f(j), \forall i, j = 0, 1, 2, \cdots, 1998,$$

只需再證明 $h(1) = h(1997) = 0$ 即可. 令 $x = k = 1$ 或 1997 代入 (2) 式, 則

$$1997 \geq |f(k) - f(1998)| \geq 1997! \cdot |h(k)|.$$

得 $h(k) = 0$, 即 $h(1) = h(1997) = 0$, 得證.

(b) 當 $n \geq 1998$. 我們取 $f(x) = x + n - 1998$. 則對 $k = 0, 1, 2, \cdots, 1998$, 我們有

$$f(k) \cdot f(1998) = (k+n-1998) \cdot n \geq 0,$$

且

$$|f(k)| = k + n - 1998 \leq n.$$

但是, $f(i) \neq f(j),\ \forall i, j = 0, 1, 2, \cdots, 1998, (i \neq j)$.

[問題14參考解答]:

我們將以第二種數學歸納法證明: $A_n > 0,\ \forall n.$

(i) $n=1$時,因爲

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}}<\frac{1}{\sqrt{a(a+b)}},$$

故 $A_1 > 0.$

(ii) $n=1,2,3,\cdots,m-1$時,假設$A_n>0$,即對任意的正數a,b恆有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a+kb}<\frac{n}{\sqrt{a(a+nb)}},\ \forall\, n<m.$$

(a) 若$n=m=2l$,則

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+lb}\right)+\left(\frac{1}{(a+lb)+b}+\frac{1}{(a+lb)+2b}+\cdots+\frac{1}{(a+lb)+lb}\right)\\
&<\frac{l}{\sqrt{a(a+lb)}}+\frac{l}{\sqrt{(a+lb)(a+2lb)}}=\frac{l}{\sqrt{a(a+lb)(a+2lb)}}(\sqrt{a}+\sqrt{a+2lb})\\
&<\frac{l}{\sqrt{a(a+lb)(a+2lb)}}\cdot 2\sqrt{a+lb}=\frac{2l}{\sqrt{a(a+2lb)}}.
\end{aligned}$$

(上一個不等式是因爲$y=\sqrt{x}$爲一凹函數). 故知$A_{2l}>0.$

(b) 若$n=m=2l+1$,則

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+(l+1)b}\right)\\
&+\left(\frac{1}{(a+(l+1)b)+b}+\frac{1}{(a+(l+1)b)+2b}+\cdots+\frac{1}{(a+(l+1)b)+lb}\right)\\
&<\frac{l+1}{\sqrt{a(a+(l+1)b)}}+\frac{l}{\sqrt{(a+(l+1)b)(a+(2l+1)b)}}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

欲證明$A_{2l+1}>0$,只需再證下一不等式:

$$(1)\text{ 式 }<\frac{2l+1}{\sqrt{a(a+(2l+1)b)}}.$$

即

$$(l+1)\sqrt{a+(2l+1)b}+l\sqrt{a}<(2l+1)\sqrt{a+(l+1)b}.$$

即

$$(l+1)^2(a+(2l+1)b)+l^2a+2l(l+1)\sqrt{a(a+(2l+1)b)}<(2l+1)^2(a+(l+1)b).$$

即

$$2l(l+1)\sqrt{a(a+(2l+1)b)}$$
$$< a((2l+1)^2-l^2-(l+1)^2)+b((2l+1)^2(l+1)-(l+1)^2(2l+1)).$$

即

$$2l(l+1)\sqrt{a(a+(2l+1)b)} < l(l+1)(2a+(2l+1)b).$$

即下列顯然的算幾不等式:

$$\sqrt{a(a+(2l+1)b)} < \frac{a+(a+(2l+1)b)}{2}.$$

[問題15參考解答]:

(a)首先觀察知道:若有正整數n_0, k_0,使得

$$2^{w(n_0)} \leq k_0\sqrt[4]{n_0},$$

則對任一質數$p \geq 2^4$及任一正整數m,都有

$$2^{w(n_0p^m)} \leq 2^{w(n_0)+1} \leq 2k_0\sqrt[4]{n_0} \leq k_0\sqrt[4]{n_0p^m}.$$

故我們僅需考慮質因數都小於$2^4=16$的正整數n.

(b)再將n_0作質因數分解,得$n_0=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_t^{m_t}$.若有一正整數$k_0$,使得$2^t \leq k_0\sqrt[4]{p_1p_2\cdots p_t}$
,則

$$2^{w(n_0)}=2^t \leq k_0\sqrt[4]{n_0}.$$

故我們僅需考慮沒有平方因數的正整數n.

(c)若$w(n_1)=w(n_0), n_0 \leq n_1$,且有一正整數$k_0$,使得$2^{w(n_0)} \leq k_0\sqrt[4]{n_0}$,則

$$2^{w(n_1)}=2^{w(n_0)} \leq k_0\sqrt[4]{n_1}.$$

綜合上面的討論,我們僅需考慮正整數$n=2,6,30,210,2310$及30030.對這些n值,我們分別有

$$\lceil\frac{2^{w(n)}}{\sqrt[4]{n}}\rceil=2,3,4,5,5,5.$$

故所求k之最小值爲5.

四、選訓營獨立研究試題

問題1:在$\triangle ABC$中,$\overline{BA}=\overline{BC}$, D與E分別爲$\overline{BA}$與$\overline{BC}$上之點. α與β分別爲$\triangle ABC$與$\triangle BDE$的外接圓.如果α與β有另一交點F,且以B爲中心,$\overline{BF}$爲半徑的圓交線段$\overline{AF}$於G.證明:$\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{CE}}$.

問題2：試求所有的正整數n，使得41爲$n9^n+(-1)^n$的因數.

問題3：設$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$滿足$f(x)+(2-x)f(2-x)=87$，求$f(x)=$？

問題4：設n爲一正整數，$f(k)$表示從數字$1,2,3,\cdots,n$中取出k個數字，但不得有連續數出現之方法數，例如：當$n=5$時，$f(1)=5$, $f(2)=6$, $f(3)=1$，$f(4)=f(5)=0$．令C_r^m表示從m個相異物中取出r個的組合數.

(a) 試證：$f(k)=C_k^{n-k+1}$　，　$\forall k=1,2,\cdots,n$；

(b) 試求函數f的最大值.

問題5：試確定不定方程$x^2-3xy-2y^2=326$是否有整數解.

問題6：設S_n表示正整數n的數字和，例如：$S_{134}=1+3+4=8$. 試確定所有可能的正質數p，使得無窮數列$S_1,S_2,S_3,\cdots$中有連續的兩項都是p的倍數.

問題7：已知$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n\ge a_{n+1}=0$，證明：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}(a_k-a_{k+1})\right)^2.$$

問題8：已知平面上兩直線L、M互相垂直於O，而C爲L及M外之一點，且CA垂直L於A. 設$AO=BO$，$\angle BOC=90^\circ$, D、E爲M上的兩點，$DO=EO$，$\angle DCE=45^\circ$, F爲射線BO上的一點，且$BF=BC$. 證明：$\triangle DEF$爲一直角三角形.

問題9：在一個凸n $(n\ge 4)$邊形中選取$(n-3)$條對角線，其中任兩條互不相交或相交於頂點，把這凸n邊形分割成$(n-2)$個三角形．請問有幾種不同的選法，使得分割後的每個三角形都和原凸n邊形有公共的邊？

問題10：在1998盒火柴盒中分別裝有$1,2,3,\cdots,1998$根火柴．今自其中若干盒（至少一盒）拿出相同根數的火柴，稱作<u>一次操作</u>；試確定這1998盒內的火柴全部被拿出的最少操作次數.

問題11：設圓O內，四個圓O_1,O_2,O_3,O_4與圓O相內切，圓O_1與圓O_2外切於點P，且圓O_3與圓O_4也外切於點P. 設圓O_i的半徑爲r_i，$i=1,2,3,4$. 證明：

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}.$$

問題12：設整數$n\ge 3$，且σ爲$1,2,\cdots,n$之一種排列，即σ爲由集合$\{1,2,\cdots,n\}$至$\{1,2,\cdots,n\}$之一對一映射，亦即

$$\{\sigma(i)|i=1,2,\cdots,n\}=\{1,2,\cdots,n\}.$$

若$a_1, a_2, \cdots, a_n$爲凸n邊形之邊長，試問函數

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - a_{\sigma(i)}}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - 2a_i}$$

是否有最小值？若有，試求其值，並確定產生該值之所有點$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

問題13：試確定所有滿足下列性質的整數a：存在一個非常數的多項式$f(x)$，使得

$$f(x^2) = f(x)f(x+a) .$$

問題14：在平面上有兩個相似四邊形，其頂點依順時針順序分別爲$A_1A_2A_3A_4$與$B_1B_2B_3B_4$. 已知這兩個相似四邊形的對應邊皆不平行．設直線$A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$分別交直線$B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_1$於點$C_1, C_2, C_3, C_4$，並設$\Delta A_iB_iC_i$的外接圓爲圓$O_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. 證明：圓O_1，圓O_2，圓O_3，圓O_4四圓共交點．

問題15：設數列$\langle f_n \rangle$滿足

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = 3f_{n+1} - f_n,\ \forall\, n = 0, 1, 2, 3, \cdots .$$

已知有兩個正整數k, m，使得f_k是f_m的因數．證明：k是m的因數．

問題16：已知有一實數x及一正整數m，其中$m = 1$或爲質數，使得$x, \frac{x^2}{m}$及x^{1998}的小數部分都相同．證明：x是m的整數倍數．

問題17：設a, b, c都是正整數．試問有多少種不同的序對(a, b, c)，滿足$\gcd(a, b, c) = 3!$，$\mathrm{lcm}(a, b, c) = 20!$？

問題18：試確定所有滿足下列條件的正整數子集S之個數：

(1) 集合S有8個元素；

(2) 當n是不大於240的正整數時，S就有一子集合T，使得T內的元素總和爲n.

問題19：設ΔABC的內切圓與$\overline{AB}$相切於M，點T在$\overline{BC}$邊上，且$T \neq B, T \neq C$. 證明：$\Delta BMT, \Delta MTA$及ΔATC的三個內切圓有一公切線．

問題20：設p是一正的質數，且$p^2 \in S$，其中

$$S = \{a^2 + 2b^2;\ a, b \text{ 都是整數，且 } b \neq 0\} .$$

證明：$p \in S$.

問題21：設實數列$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2000}$滿足

(1) $0 \leq x_{1999} \leq x_{2000}$;

(2) $x_1+x_2+\cdots+x_{1998}=x_{1999}$;

(3) $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{1998}|=x_{2000}$.

證明:存在$i,j\in\{1,2,3,\cdots,1998\}$,使得

$$x_{2000}-x_{1999}\le 999(x_i-x_j)\ .$$

問題22:設空間中一個質點每次移動的規則是:從點(x,y,z)移到點$(x^2+2yz,y^2+2zx,z^2+2xy)$. 試找出所有的點$(a,b,c)$,其中$a,b,c>0$,使得由點$(a,b,c)$出發,經過有限次的移動後又可回到原出發點.

問題23:設$M=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots\}$. 對$M$中的等差數列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$,如果不存在$a_0\in M$或$a_{k+1}\in M$,使得數列$a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$或$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k,a_{k+1}$仍爲一等差數列,則稱數列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$爲$M$中長度$k$的極大等差數列. 例如: $\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{20}$爲$M$中長度3的極大等差數列.

(a) 試在M中找出一長度1998的極大等差數列;

(b) 在M中是否存在一長度17的極大等差數列?

問題24:試確定最小的正整數n,使得平面上有n個相異已知點,同時具有以下的性質:

(1) 任何一個以這些已知點爲頂點的凸五邊形內部至少都有另一已知點;

(2) 其中有7個已知點爲某一個凸七邊形的頂點.