1998 年第 10 屆亞太數學奧林匹亞競賽試題參考解答及評析

中華民國數學奧林匹亞委員會試題組提供

壹、一九九八年亞太數學奧林匹亞競賽試題

比賽時間：1998 年 3 月 9 日

比賽地點：台師大理學院

注意事項：

(1) 本試卷共五題，每題滿分七分。

(2) 考試時間：4 小時(9:30 - 13:30)。

(3) 計算紙必須連同試卷繳回。

(4) 不可使用計算器。

[問題一]設 n 爲一正整數，F 表示所有 n 重集合 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 構成的集合族，其中每一個 A_i 都是 $\{1,2,\cdots,1998\}$ 的子集合，$i=1,2,\cdots,n$；且設 $|A|$ 表示集合 A 的元素個數。試求出下列級數和：

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| 。$$

[問題二]證明：對於任意的正整數 a 與 b，$(36a+b)(36b+a)$不可能是 2 的正整數次方。

[問題三]設 a, b, c 爲正實數，證明：

$$(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}) 。$$

[問題四]三角形 ABC 中，$\overleftrightarrow{AD}$垂直$\overleftrightarrow{BC}$於 D 點。設 D, E, F 爲共線的相異三點，且 $\overleftrightarrow{AE}$與$\overleftrightarrow{BE}$垂直，$\overleftrightarrow{AF}$與$\overleftrightarrow{CF}$垂直。令線段$\overline{BC}$的中點爲 M，線段$\overline{EF}$的中點爲 N。證明：$\overline{AN}$與$\overline{NM}$垂直。

[問題五]試確定滿足下列性質的最大整數 n：

n 可以被所有小於 $\sqrt[3]{n}$ 的正整數整除。

貳、參考解答：

[問題一]設 n 爲一正整數，F 表示所有有序 n 元族 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，其中每一個 A_i 都是 $\{1,2,\cdots,1998\}$ 的子集合，$i=1,2,\cdots,n$；且設 $|A|$ 表示集合 A 的元素個數。試求出下列級數和：

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \text{ 。}$$

(解法一)：(APMO 總部所提供的解法)

若 M 是 $\{1,2,\cdots,1998\}$ 的子集合且 $|M=k|$，則將 M 表示成 $A_1 \cup A_2 \cdots A_n$ 的方法共有 $(2^n-1)^k$ 種(因爲每一個 M 的元素分配到 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的方法有 2^n-1種)。

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{1998} \sum_{|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=k} k = \sum_{k=1}^{1998} k \cdot C_k^{1998} \cdot (2^n-1)^k \text{ 。}$$

繼續化簡上式可得

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = 1998(2^n-1)\sum_{k=0}^{1997} C_k^{1997} \cdot (2^n-1)^k = 1998(2^n-1)2^{1997n}$$

(解法二)：(我國參賽學生廖健溢同學的解法)

對每一個 k, $k=1,2,\cdots,1998$；令 N_k 爲 $k \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 之所有這種序對 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 的個數； 則易知

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = N_1 + N_2 + \cdots + N_{1998} \text{ 。}$$

由對稱性，我們可知 $N_1 = N_2 = \cdots = N_{1998}$；所以

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = 1998 \cdot N_1 \text{ 。}$$

顯然，$|F| = 2^{1998} \cdot 2^{1998} \cdots\cdots 2^{1998} = 2^{1998n}$。令 F' 爲所有使得 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 中不含 1 的序對 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 所形成的集合，則

$$|F'| = 2^{1997} \cdot 2^{1997} \cdots\cdots 2^{1997} = 2^{1997n} \text{ 。}$$

因爲 $F \setminus F'$ 中的每一個序對 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 均滿足 $1 \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，所以

$$N_1 = |F \setminus F'| = 2^{1998n} - 2^{1997n} \text{ 。}$$

故

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = 1998 \cdot 2^{1997n} \cdot (2^n-1) \text{ 。}$$

[問題二]證明：對於任意的正整數 a 與 b，$(36a+b)(a+36b)$不可能是 2 的正整數次方。

(解法一)：(APMO 總部所提供的解法)

假設存在正整數 a, b，使得$(36a+b)(a+36b)$爲 2 的正整數次方；表示爲

$$36a+b=2^m=r \quad 且 \quad 36b+a=2^n=s；$$

則

$$36r-s=35\times37a \quad 且 \quad 36s-r=35\times37b 。$$

因此，

$$\frac{1}{36}<\frac{r}{s}=2^{m-n}<36$$

從而可得

$$-6<m-n<6 。$$

另一方面，因爲

$$4^n(4^{m-n}-1)=r^2-s^2=35\times37(a^2-b^2)，$$

得

$$4^{m-n}\equiv1(\mathrm{mod}\,37) 。$$

觀察到

$$4^9\equiv1(\mathrm{mod}\,37)$$

且

$$4^k\equiv1(\mathrm{mod}\,37),\quad 0<k<9 。$$

由此可得

$$9\mid m-n 。$$

注意 $m\neq n$，而得 $9\leq|m-n|$，此與 $|m-n|<6$ 矛盾。

(解法二)：(我國參賽答對的學生大多數採用之方法)

假設 $(36a+b)(36b+a)=2^t$，則

$$36a+b=2^m,\quad a+36b=2^n.$$

從而可得 a, b 均爲偶數。

令

$$d=(a,b),\quad a_1=\frac{a}{d},\quad b_1=\frac{b}{d}.$$

由於

$$2^t=(36a+b)(36b+)=d^2(36a_1+b_1)(a_1+36b_1)$$

得 $d=2^k$，k 爲一整數。

今由上述等式中兩邊各除以 2^{2k}，可得

$$(36a_1+b_1)(a_1+36b_1)=2^{t-2k}\text{。}$$

從而可得 a_1,b_1 爲偶數，此與 $(a_1,b_1)=1$ 矛盾。

[問題三]設 a, b, c 爲正實數，證明：

$$(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a})\geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})\text{。}$$

(解法一)：(APMO 總部所提供的解法)

記原不等式爲(1)式。設 $x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{abc}}$，$y=\dfrac{b}{\sqrt[3]{abc}}$，$z=\dfrac{c}{\sqrt[3]{abc}}$，則 $xyz=1$ (或不妨直接設 $abc=1$)；因而(1)式等價於

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2(1+x+y+z) \qquad (2)$$

(或於上式中以 a，b，c 取代 x，y，z)

因爲 $xyz=1$ (或因爲 $abc=1$)，(2)式等價於

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 2+2(x+y+z) \qquad (3)$$

(或於上式中以 a，b，c 取代 x，y，z)

由於

$$(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$$

(或於上式中以 a，b，c 取代 x，y，z)

所以(3)式又等價於

$$(x+y+z)(xy+yz+zx-2)-xyz\geq 2 \qquad (4)$$

(或於上式中以 a，b，c 取代 x，y，z)。

因爲 $xyz=1$ (或因爲 $abc=1$)，由算幾不等式可知

$$x+y+z\geq 3 \quad 且 \quad xy+yz+zx\geq 3\text{。}$$

(或於上式中以 a，b，c 取代 x，y，z)

故(4)式成立，因而(1)式成立。

(解法二)：(APMO 總部所提供的解法)

同(解法一)得到(3)式。

因爲 $xyz=1$(或因爲 $abc=1$)，

$$(x+y)(y+z)(z+x)=2xyz+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$$
$$=2+x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

(或於上式中以 a，b，c 取代 x，y，z)

所以(2)式等價於

$$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 2(x+y+z) \tag{5}$$

(或於上式中以 a，b，c 取代 x，y，z)

不妨設 $x\geq y\geq z$ (或不妨設 $a\geq b\geq c$)，則

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geq\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$$

(或於上式中以 a，b，c 取代 x，y，z)

所以由 Chebyshev 不等式可得

$$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\geq\frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\right) \tag{6}$$

(或於上式中以 a，b，c 取代 x，y，z)

因為 xyz=1(或因為 abc=1)，由算幾不等式可知

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\geq 6\ 。$$

(或於上式中以 a，b，c 取代 x，y，z)

將此代入(6)式可知(5)式成立，因而(1)式成立。

(解法三)：不妨設 abc=1，則(1)式等價於

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2(1+a+b+c) \tag{7}$$

因為

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=2+\left(\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{b+c}{a}\right)$$

所以(7)式等價於

$$\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{b+c}{a}\geq 2(a+b+c) \tag{8}$$

因為 abc=1，由算幾不等式可知

$$\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{b+c}{a}=\frac{a+c+b}{b}+\frac{b+a+c}{c}+\frac{b+c+a}{a}-3$$
$$\geq 3(a+b+c)-3$$

所以(8)式等價於

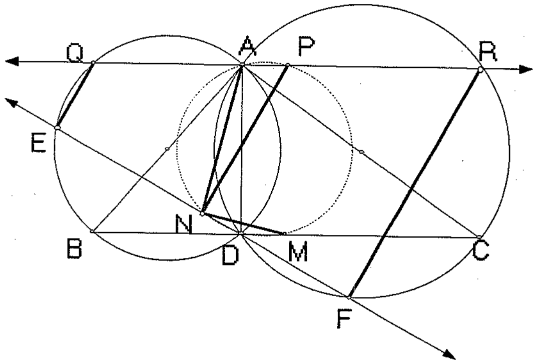
$$a+b+c\geq 3 \tag{9}$$

因為 $abc=1$，由算幾不等式(9)式顯然成立，因而(1)式成立。

[問題四]三角形 ABC 中，$\overleftrightarrow{AD}$ 垂直 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D 點。設 D, E, F 為共線的相異三點，且 $\overleftrightarrow{AE}$ 與 $\overleftrightarrow{BE}$ 垂直，$\overleftrightarrow{AF}$ 與 $\overleftrightarrow{CF}$ 垂直。令線段 $\overline{BC}$ 的中點為 M，線段 $\overline{EF}$ 的中點為 N。

證明：$\overline{AN}$ 與 $\overline{NM}$ 垂直。

[解]：(APMO 總部所提供的解法)



設 P 點使得 $ADMP$ 為矩形。選取 Q, R 位於直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 上，使得 $QBDA$ 及 $ADCR$ 為矩形；則點 Q, B, D 位於以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓周上，因此 A, D, E, Q 四點共圓。同理，點 R, C, D 位於以 $\overline{AC}$ 為直徑的圓周上，而 A, D, F, R 四點共圓。

這兩個矩形共邊，而其他的對邊($\overline{EQ}, \overline{FR}$)具有相同的支撐線($\overline{EF}, \overline{QR}$)，由共圓性得知：$\overline{EQ}$ 與 $\overline{FR}$ 平行。

另一方面，在矩形 $QBCR$ 中，M 是 $\overline{BC}$ 的中點，而 $\overline{MP}$ 與 $\overline{QB}$ 平行；因此 P 為 $\overline{QR}$ 的中點。在梯形 $QEFR$ 中 $\overline{NP}$ 與 $\overline{EQ}$ 平行。

由於 $ADNP$ 的各邊與 $ADRF$ 平行，$ADNP$ 四點共圓。由於矩形 $ADMP$ 四點共圓，所以 $ADMN$ 四點共圓。

因此 $\angle ANM=180°-\angle ADM=90°$ 。

[問題五]試確定滿足下列性質的最大整數 n：

n 可以被所有小於 $\sqrt[3]{n}$ 的正整數整除。

[解]：(APMO 總部所提供的解法)

由觀察知 $lcm(2,3,4,5,6,7)=420$ 能被所有小於 $\left\lfloor\sqrt[3]{420}\right\rfloor=7$ 的正整數整除、；而

$lcm(2,3,4,56,7,8)=840$ 不能被 $\lfloor \sqrt[3]{840} \rfloor = 9$ 整除。因此猜測答案為 420。

底下證明 420 為為所求的最大整數：

設 N 是所求的最大整數且 $N>420$。令 $t=\lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor$，則

$$\sqrt[3]{N}-1<t$$

得

$$N<(t+1)^3$$

因此，$N \le t^3+3t^2+3t$ (1)

由 $t \ge 7$ 知 420 整除 N，因此 $N \ge 840$。則 $t=\lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor \ge \lfloor \sqrt[3]{840} \rfloor = 9$，所以

$$lcm(2,3,4,5,6,7,8,9)=2520 \text{ 整除 } N。$$

由此得 $t \ge \lfloor \sqrt[3]{2520} \rfloor = 13$

任意 4 個連續整數中任意 2 個整數的 gcd 只能為 1 或 2 或 3，且這些 gcd 中至多 1 個 2、1 個 3。因此由題意知 $t(-1)(t-2)(t-3)$ 整除 $6N$。由此知

$$t(-1)(t-2)(t-3) \le 6N \qquad (2)$$

由(1)和(2)得

$$t(t-1)(t-2)(t-3) \le 6(t^3+3t^2+3t)$$

化簡得 $t^4 \le 12t^3+7t^2+24t$，因此

$$1 \le \frac{12}{t}+\frac{7}{t^2}+\frac{24}{t^3}。$$

但 $t \ge 13$，所以

$$\frac{12}{t}+\frac{7}{t^2}+\frac{24}{t^3}<1；$$

得到矛盾。

參、試題分析：

[問題一]：1. 本題為組合的計數問題，是我國提供給 APMO 總部的題目，但也是本次競試中我國學生得分率最低的一題。這雖然充分的表示我國提供題目的公正，但今後最好盡量避免提供我國學生最生疏的問題。在我國參加競試的六十八位學生成績前十名的代表中有五位得到滿分，一位得 2 分，二位得 0 分；這前十名代表此題的得分率僅為 0.56，值得檢討。

2. 在競試中有許多學生不了解題目的意思而提出書面疑難要求解釋題意，也

都獲得書面回答。

3. 組合的計數問題在我國的正規高中數學教育中很少受到重視，應該改進。
4. 高雄中學廖健溢同學的解法(參見本題解法二)比 APMO 總部所提供利用富比尼定理及二項式定理的解法要簡便許多，不僅提升了解題品質，也減少許多計算的時間，這也許是廖健溢同學能得滿分的原因。

[問題二]：1. 本題為簡單的數論問題，是新加坡所提供的題目。在我國參加競試的六十八位學生中有四十八位得滿分，前二十名代表全部得到滿分，為本次競試中我國學生得分最理想的一題。

2. 在前十名的代表中僅有三位學生的解題方法與 APMO 總部所提供的解法一致，其餘的七位學生都是直接利用 2 的乘冪來討論而證明了本題，比 APMO 總部所提供的解答更好。

[問題三]：1. 本題是不等式的問題，是美國所提供的題目。在我國參加競試的六十八位學生中有四十五位得滿分，前二十名代表全部得到滿分，但是也有二十一位學生得 0 分，是鑑別率最高的一題。

2. 許多答對本題我國參加競試學生的解法都比 APMO 總部所提供的解法要簡捷。高雄中學廖健溢同學雖然本題得到滿分，但他是利用排序不等式所得到的結果：

$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_{1i}^{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}a_{2i}^{n}\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ni}^{n}\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{m}a_{1i}a_{2i}\cdots a_{ni}\right)^{n}$$

來證明本題，反使問題複雜了。

[問題四]：1. 本題是簡單的平面幾何問題，也是美國所提供的題目。我國參加競試的六十八位學生中有四十五位得滿分且前二十名代表中除了一位學生得到 6 分之外，全部得到滿分。我國參加競試的六十八位學生的平均成績為 5.1 分，尚屬理想。

2. 在答對的學生中，有的是用綜合幾何的解法，有的是用向量幾何的解法，也有的是用解析幾何的解法；尤其游志強同學及廖健溢同學利用旋轉不變量之概念證明兩個三角形的相似，簡化了證明過程因而也提升了解題的品質。

[問題五]：1. 本題是代數問題，是澳洲所提供的問題；應屬於中稍偏難的問題，但我國參加競試的六十八位學生中有二十六位得 0 分，應該檢討。

2. 在我國參賽的前十名代表中有五位得到滿分，二位得到 5 分，但也有一位僅得到 1 分。這前十名代表的得分率爲 0.76，爲這次五個題目中得分率第二低的題目。
3. 本題的解法是先看出答案後再採用矛盾證法，在我國正規的高中數學教材中較少使用這種證明方式，以後在 APMO 訓練營中需要加強這方面的訓練。

綜合言之，這次 APMO 競賽的五道試題中第一題難度最高，第五題其次，第二、第三及第四道題目是較簡單的題目。將最難的題目放在第一題是 APMO 總部題目安排上的缺失，誤導學生以爲這是最容易的題目而花費太多的時間且失去信心。相信這將會影響到這次 APMO 競賽的總成績；對我國參賽的總平均成績也有一些影響。