中學數學挑戰徵答題參考解答評析

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號
2036

試求下列聯立方程組的實數解：

$$\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7\end{cases}\text{。}$$

解答：解法(一)：

(一) $(x,y)=(0,0)$ 顯示是方程組之解。

(二)當 $x\neq 1$ 時，$1+y^7=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=\dfrac{1-x^8}{1-x}$

(i)若 $x=y$，則 $1+x^7=\dfrac{1-x^8}{1-x}$，整理得 $x^7=x$，$\because x,y\in R$

$\therefore x=0$ 或 $x=-1$，$\therefore (x,y)=(0,0)$，$(-1,-1)$ 是方程組的 2 組解。

(ii)接著我們討論當 $x\neq y$ 時，方程組是否有解。

(1)若 $x>0$ 且 $y<0$，$\because (1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1$ 而 $1+y^7<1$

顯然不滿足方程組，$\therefore$ 不可能有 $x>0$ 且 $y<0$ 之解。

(2)若 $x<0$ 且 $y>0$，仿(1)，同理可知亦不可能有解。

(3)若 $x>y>0$，$\because (1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1+x^7>1+y^7$

$\therefore$ 不可能有 $x>y>0$ 之解。

(4)若 $y>x>0$，仿(3)，同理可知亦不可能有解。

(5)若 $0>x>y$

$$\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7\text{........}<1>\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7\text{.......}<2>\end{cases}$$

<1>式同乘 $(1-x)$ 得 $1-x^8=(1-x)(1+y^7)$..........(*)

<2>式同乘 $(1-y)$ 得 $1-y^8=(1-y)(1+x^7)$..........(**)

(*)-(**)整理後可得

$y^8-x^8=(y-x)+(y^7-x^7)+xy(x^6-y^6)$...........(***)

但 $0>x>y\Rightarrow x^6<y^6$，$x^7>y^7$，$x^8<y^8$，$xy>0$

如此造成(***)左式爲正，而(***)右式爲負之矛盾結果。

故方程組不可能有 $0>x>y$ 之解。

(6)若 $0>y>x$，同理亦知不可能。

(三)綜合以上討論可知方程組只有$(x,y)=(0,0),(-1,-1)$兩組解。

解法(二)：（採自建中李國禎之解法。）

令$f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$

$\Rightarrow f'(x)=7x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$

$=4x^6+3x^4(x+1)^2+2x^2(x+1)^2+(x+1)^2>0$

故$f(x)$為嚴格遞增函數

再令$g(x)=1+y^7$，同理也可證$g(x)$為嚴格遞增函數，若$x\neq y$，不妨令$x>y$

$\therefore f(x)>f(y)$　且$g(x)>g(y)$

而題目$\begin{cases} f(x)=g(y)—① \\ f(y)=g(x)—② \end{cases} \Rightarrow f(x)>f(y)\underset{(由②)}{=}g(x)>g(y)$與$f(x)=g(y)$(①式)矛盾

故$x=y\Rightarrow f(x)=g(x)\Rightarrow x\cdot\dfrac{x^6-1}{x-1}=0$　$\overset{因x=1代入f(x)=g(x)不合}{(x\neq 1)}\Rightarrow x(x^6-1)=0$

又$x\in R$　　$\therefore x=0或-1$

$\therefore (x,y)=(0,0)或(-1,-1)$

《解題重點》

1. $(x,y)=(0,0)$是方程組之一解。

2. $x\neq 1$時，$1+y^7=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=\dfrac{1-x^8}{1-x}$。

3. 分別就$x=y$及$x\neq y$討論之。

《評析》

1. 本題配合代數題材而設計，在本期總共53位徵答者中，有花蓮高中黃博翔等35位參與本題徵答（含台師大附中國中部陳泊寧及高師大附中國中部何思賢），高一人數略多於高二人數，應屬簡易題，得分率0.89，比預期略低。
2. 此題參與徵答者幾乎均能找到正解$(x,y)=(0,0)$，$(-1,-1)$，但有長期參與徵答者與偶而參與徵答者的書寫品質就分出優劣了！解題品質佳者均能就$x=y$及$x\neq y$分別討論之。
3. 建中王維邦將題目給定的二次方程式相加再討論，方法直接，解題品質甚佳，而高師大附中國中部何思賢以國三生就能有如此佳的解題品質更是令人期待他日後的表現，台師大附中國中部陳泊寧此題也得滿分。
4. 建中李國禎之解法中利用高三理科數學導數概念求解，思考細緻，解題品質甚佳。

問題編號 2037

兩正整數 m，n 之最大公因數及最小公倍數分別以$(m,\ n)$及$[m,\ n]$表示。試找出所有滿足下列兩條件的正整數 m，n：

(1) $m<n$

(2) $(m,n)+[m,n]=m+n$。

解答：令 $(m,n)=d\geq 1$，則$m=ad$，$n=bd$，其中 a, b 是互質的兩正整數，

$a<b$ 且$[m,\ n]=abd$。

依題意之條件(2)可得 $d+abd=ad+bd \Rightarrow d(a-1)(b-1)=0$

$\because d\neq 0$，$\therefore a=1$ or $b=1$，由於$m<n$，$\therefore a=1$，$b\neq 1$，

$\therefore m=d\geq 1$，$b\geq 2$，故我們得到 m、n 間之關係爲 $m\mid n$，但 $m\neq n$，（即 $n=km$，$m\geq 1$，$k\geq 2$，$k\in N$），這說明了：所有不小於 2 的正整數均是滿足題意之 n，而凡是小於 n 且爲 n 的因數的任意正整數 m 都合乎所求。

《解題重點》

1.令 $(m,n)=d\geq 1$，則 $m=ad$，$n=bd$，其中 a,b 是互質的兩正整數，$a<b$。

2.依題意得 $d+abd=ad+bd$，因 $a<b$，解得 $a=1$，$b\neq 1$。

3.$m\mid n$，但 $m\neq n$。

《評析》

1.本題配合數論題材而設計，亦屬簡易題型，在本期五道題中，徵答本題人數最多，計有北一女中<u>葉書蘋</u>等 48 位（含台師大附中部<u>陳泊寧</u>，高師大附中<u>何思賢</u>及鳳山國中<u>朱浩瑋</u>及光仁高中國中部<u>宓彥廷</u>）得分率 0.90，尚稱理想。

2.本題幾乎是參答者的最愛，也是參答者最“疑慮”的一題，因他們不敢相信竟有如此“簡易題”出現資優通訊解題中。

3.不出預料，果然台灣學生並不大會表達他們所寫出算式的中文意義，所以近一成的學生被扣分，未能達滿分，誠屬可惜。

問題編號 2038

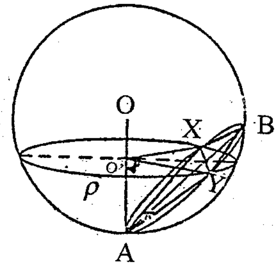
已知球心爲 O 的球面 S 和平面 E 交出一圓 ρ，且球面上兩點 A，B 是位於平面 E 的異側。若半徑 $\overline{OA}$ 垂直平面 E，而另一包含直線 AB 的平面 π 交圓 ρ 於 X,Y 兩點。

證明：不管平面 π 如何變動，$\overline{BX}\cdot\overline{BY}$ 恆爲定值。

解答：解法(一)：

設圓 ρ 之圓心爲 O'，$\overline{AB}$=定值 a

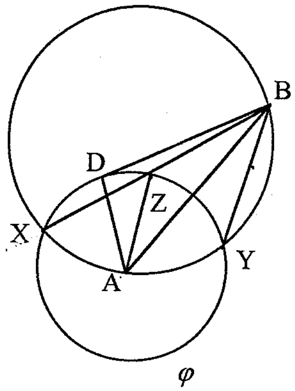
①因爲 $\overline{OA}$ 垂直平面 E，所以 $\overline{AO'}\perp\overline{O'X}$，



$\overline{AO'} \perp \overline{O'Y}$，由畢氏定理，

$\overline{AX}^2 = \overline{AO'}^2 + \overline{O'X}^2 = \overline{AO'}^2 + \overline{O'Y}^2 = \overline{AY}^2$，又 $\overline{AO'}$ 和 $\overline{O'X} = \overline{O'Y}$ = 圓 ρ 之半徑，均和平面 π 之選取無關，故 $\overline{AX} = \overline{AY}$ = 定值 b。

②因爲 A、X、B、Y 四點共圓且 $AX=AY$　$\therefore \angle ABX = \angle ABY$。



③今在平面 π 上作一以 A 點爲圓心，半徑爲 b 之圓 φ，

(a)若 $\overline{BX} = \overline{BY}$，則 $\overline{BX}$ 和 $\overline{BY}$ 是圓 φ 之二條相交於 B 點的切線，

$\therefore \overline{BX} \cdot \overline{BY} = \overline{BX}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AX}^2 = a^2 - b^2$ 爲一定值。

(b)若 $\overline{BX} \neq \overline{BY}$，不妨設 $\overline{BX} > \overline{BY}$，則圓 φ 交 $\overline{BX}$ 於 Z 點，$Z \neq X$

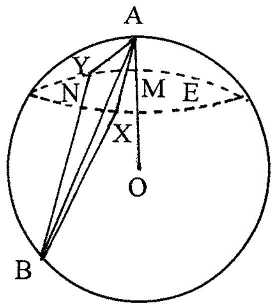
$\because \angle ABX = \angle ABY$，$\therefore \overline{BZ} = \overline{BY}$。過 B 點作圓 ρ 之切線交圓 ρ 於 D 點。

由圓冪性質，得 $\overline{BX} \cdot \overline{BY} = \overline{BX} \cdot \overline{BZ} = \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = a^2 - b^2$ 爲一定值。

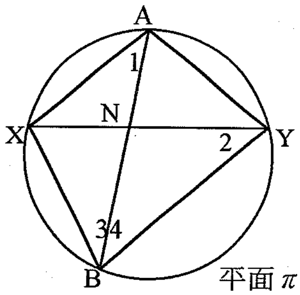
（$\overline{BY} > \overline{BX}$ 情況亦同。）

綜合(a)、(b)我們得證本命題。

解法(二)：（採自建中王維邦，台師大附中王世豪及雄中李俊裕等之解法。）



圖一



圖二

(1)如圖一，$\overline{AO}$ 交於平面 E 於 M, AB 交平面 E 於 N。

(2)$\because \overline{AO} \perp$ 平面 E，$\therefore A, O$ 在平面 E 上的投影均爲 M，且 M 爲圓 ρ 之圓心 $\Rightarrow \overline{AX} = \overline{AY}$。

(3)如圖二，考慮平面 π，$\because \overline{AX} = \overline{AY}$　$\therefore AX = AY \Rightarrow \angle 3 = \angle 4$，又 $\angle 1 = \frac{1}{2}\overline{XB} = \angle 2$

$\therefore \Delta AXB \sim \Delta YNB$

(4)$\because \Delta AXB \sim \Delta YNB \quad \therefore \overline{BX} : \overline{BN} = \overline{AB} : \overline{BY} \Rightarrow \overline{BX} : \overline{BY} = \overline{AB} : \overline{BN}$

(5)$\because$平面π的移動並未影響$\overline{AB}, \overline{BN}$故$\overline{BX} \cdot \overline{BY}$為定值。

《解題重點》

1.簡易立體概念。

2.$\because \overline{OA} \perp E$，$\therefore \overline{AO'} \perp \overline{O'X}$，$\overline{AO'} \perp \overline{O'Y}$，由畢氏定理可得$\overline{AX}^2 = \overline{AO'}^2 + \overline{O'X}^2 = \overline{AO'}^2 + \overline{O'Y}^2 = \overline{AY}^2$，因$\overline{AO'}$和$\overline{O'X} = \overline{O'Y}$與平面$\pi$之選取無關，故$\overline{AX} = \overline{AY} =$定值。

3. $\because \angle ABX = \angle ABY$。

4.圓冪定理、托勒密定理、平分角線性質等。

《評析》

1.本題配合立體幾何題材而設計，對立體圓形概念清晰者，本題應屬中偏易，惟僅有新竹高中王奐之等 24 人參與徵答，跟第 2040 題一樣，參與徵答人數偏少，顯示立體幾何的問題普遍是中學生較弱的一環。

2.參與徵答人數雖少，但徵答者幾乎都能得滿分，值得肯定，且其中有不少高一學生，得分率高達 0.96，應與徵答人數較少有關。

3.建中王維邦，竹中王奐之，雄中林家平等都有不錯的解題品質。

問題編號 2039	將 3^{11} 表示成 k 項連續正整數之和，試求項數 k 的最大值．

解答：我們將 3^{11} 表示為首項為 $a \geq 1$，公差為 1，項數為 k 的等差級數，

即 $3^{11} = a + (a+1) + \cdots + [a + (k-1)] = \dfrac{k[2a + (k-1)]}{2}$。

①$\because a = \dfrac{2 \times 3^{11} - k^2 + k}{2k} \geq 1$，$\therefore k^2 + k - 2 \times 3^{11} \leq 0$，

$\therefore 0 < k^2 < k^2 + k \leq 2 \times 3^{11}$，故我們初步估算出 k 之範圍為 $0 < k \leq 595$。

②$\because \dfrac{2 \times 3^{11}}{k} = 2a + (k-1) \in N$，$\therefore k$ 是 2×3^{11} 的正因數。

$\therefore k = 2^m \times 3^n$，其中 $m = 0$ 或 1，$0 \leq n \leq 11$，n 為整數。

(a)若 $m = 0$ 時，$k = 3^n$，由①得 $0 < k = 3^n \leq 595$，取 $n = 5$ 時，$k = 243$ 最大，此時

a=608；

(b)若 $m=1$ 時，$k=2\times 3^n$，由①得 $0<k=2\times 3^n\le 595$，取 $n=5$ 時，$k=486$ 最大，此時 a=122。

由上討論可知，k 的最大值爲 486。

《解題重點》

1. $3^{11}=a+(a+1)+\cdots+[a+(k-1)]=\dfrac{k[2a+(k-1)]}{2}$，其中 a 是某整數。

2. 由 1. 知 $a=\dfrac{2\times 3^{11}-k^2+k}{2k}\ge 1$，經整理得 $0<k^2<k^2+k\le 2\times 3^{11}$，可估算出 $0<k\le 595$。

3. $\because \dfrac{2\times 3^{11}}{k}=2a+(k-1)\in N$，$\therefore k=2^m\times 3^n$，其中 m=0 或 1，$0\le n\le 11$，n 爲整數。

《評析》

1.本題配合代數（數論）題材設計，原先預期難度稍高，但完全出乎意料之外，徵答人數僅少於第 2036 題，計有宜蘭高中<u>游家瑋</u>等 35 人（含台師大附中國中部<u>陳泊寧</u>，高師大附中國中部<u>何思賢</u>及鳳山國中<u>朱浩瑋</u>）得分率 0.93，堪稱理想，值得欣慰。

2.解題方法大致和參考解答類似，亦有少數是以討論 k 的奇偶性，找出中間項 $a_{\frac{k+1}{2}}$ 或 $\dfrac{a_{\frac{k}{2}}+a_{\frac{k}{2}+1}}{2}$ 得 $3^{11}=ka_{\frac{k+1}{2}}$ 或 $3^{11}=\dfrac{k}{2}(2a_{\frac{k}{2}+1})$ 來求解，如雄中<u>王俊傑</u>等。

3.參與徵答的三位國中生（分屬國一、二、三年級），都得滿分，應獲肯定；若能持續努力且校方輔導老師及家長充分配合支援，其數學能力前景不可限量。

問題編號 2040

設 $p(x)$ 爲五次多項式，其各項係數均取自集合$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$中元素且兩兩相異。

試確定滿足上述條件且可被 (x^2-x+1) 整除的 $p(x)$ 之個數。

解答：設 $p(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$，其中 a,b,c,d,e,f 兩兩相異，由長除法得

$$p(x)=(x^2-x+1)\left[ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+(d-a+c)\right]$$
$$+(d+e-a-b)x+(f+a-c-d)$$

$\because p(x)$ 可被 (x^2-x+1) 整除，

$$\therefore \begin{cases} d+e-a-b=0 \\ f+a-c-d=0 \end{cases},$$

故我們初步得到 $p(x)$ 係數間關係爲 $c-f=a-d=e-b\neq 0$，接著我們就 a,d 兩數之差分別討論之。

①若 a,d 差 1，在不失一般性下不妨先設 $a<d$，$\therefore (a,d)$ 可能情形有(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8)，因爲 $c-f=a-d=e-b$ 且 a,b,c,d,e,f 兩兩相異，所以 (a,d), (c,f), (e,b) 之取法有{(1,2), (3,4), (5,6)}、{(1,2), (3,4), (6,7)}、{(1,2), (3,4), (7,8)}、{(1,2), (4,5), (6,7)}、{(1,2), (4,5), (7,8)}、{(1,2), (5,6), (7,8)}、{(2,3), (4,5), (6,7)}、{(2,3), (4,5), (7,8)}、{(2,3), (5,6), (7,8)}、{(3,4), (5,6), (7,8)}等 10 種取法，因每一種取法有 3!種分配法，所以共有 $10\times 3!=60$ 種。同理，$a>d$ 之情形可仿上討論亦得 60 種，因此當 a, b 差 1 時，a,b,c,d,e,f 之取法共 120 種。

②若 a,d 差 2，$a<d$ 時，(a,d) 可能情形有(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (5,7), (6,8)，因爲 $c-f=a-d=e-b$ 且 a,b,c,d,e,f 兩兩相異，所以 (a,d), (c,f), (e,b) 之取法有{(1,3), (2,4), (5,7)}、{(1,3), (2,4), (6,8)}、{(1,3), (4,6), (5,7)}、{(1,3), (5,7), (6,8)}、{(2,4), (3,5), (6,8)}、{(2,4), (5,7), (6,8)}、等 6 種取法，因爲一種取法有 3!種分配法，所以共有 $6\times 3!=36$ 種。同理，$a>d$ 之情形可仿上討論亦得 36 種，因此當 a,d 差 2 時，a,b,c,d,e,f 之取法共 72 種。

③同理可求當 a,d 差 3 時，a,b,c,d,e,f 之取法共 48 種；

當 a,d 差 4 時，a,b,c,d,e,f 之取法共 48 種；

當 a,d 差 5 時，a,b,c,d,e,f 之取法共 12 種。

④當 a,d 之差大於 5 時，不存在符合命題之 a,b,c,d,e,f。

綜合以上結果，我們可算出符合命題之 $p(x)$ 共有 300 個。

《解題重點》

1.除法原理。

2.若設 $p(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$，$a,b,c,d,e,f$ 兩兩相異，則可得 a,b,c,d,e,f 間關係爲 $c-f=a-d=e-b\neq 0$。

3.分別就 a,d 兩數之差討論之。

《評析》

1.本題屬組合數學之範疇，在這期中屬難度最高者，完全符合原先之預期，徵答者僅有台中一中林宗茂等 25 人，得分率 0.71，亦屬最低。

2.徵答者都能找到多項式 $p(x)$的係數間關係式，但由於討論不足或偏差而未能成功求出 $p(x)$正確個數，殊爲遺憾。

3.雄中廖健溢同學等解題品質較佳。

評註：

1.本次徵答統計簡表如下：

總人數 49 人	問題編號	2036	2037	2038	2039	2040
	得分	219	304	161	242	125
	徵答人數	35	48	24	37	25
	得分率	0.89	0.90	0.96	0.93	0.71
一年級 21 人	得分	100	137	68	106	53
	徵答人數	16	21	10	16	11
	得分率	0.89	0.93	0.97	0.95	0.69
二年級 22 人	得分	87	127	58	108	41
	徵答人數	14	21	9	17	9
	得分率	0.89	0.86	0.92	0.91	0.65
三年級 6 人	得分	32	40	35	28	31
	徵答人數	5	6	5	4	5
	得分率	0.91	0.95	1.00	1.00	0.89
參與徵答總校數：20 所 計：　計畫內：10 所，非計畫內：10 所						

2.本期（編號 2036～2040）徵答人數較上一次略多，難度相當，高一、二參與人數也相當，應與前三道題的知識領域範圍多在高一下基礎數學有關。

3.本期屬本研計畫之最後一期，有一些新面孔參與徵答，如新竹高中王奐之，花蓮高中魏軍浩、黃博翔、葉倫武，基隆二信高中廖思涵及張君儒等，希望這些新的生力軍往後還會繼續參加類似的活動，對數學能力之提昇有所助益。

4.本期徵答成績較優異的學生計有：建中王維邦、李國禎、蔡忠潤、陳奕瑋；北一女中曾于容、葉書蘋；台師大附中呂楊凱、陳正傑、林建位、王世豪；武陵高中王嘉慶、余謝銘；台中一中林宗茂、蔡政育；花蓮高中魏軍浩、黃博翔；雄中林家平、廖健溢及金門高中翁克全等 19 人。

5.學生心得感言摘錄如下：

①這應該是我最後一次參加通訊徵答，願以詩經的「戰戰兢兢，如臨深淵，如履薄冰。」來勉勵學弟妹，繼續參加，必有出頭的一天。（台師大附中，陳正傑。）

②編號 2036 題若單就 $x=y$ 方面思考尚屬簡易，但我卻無法做出 $x\neq y$ 有何情形，希望老師為我解惑。（雄中，蘇桄緯。）

（注：請參考編號 2036 的解法(一)。）

③編號 2036 寫的奇函數偶函數不知道用的對不對，名稱有沒有用錯，只是至少知道若 x，y 的正負和 $p(x)$，$q(y)$ 一致，而 $f(x)$，$g(y)$ 恆 ≥ 0。（金門高中，翁克全。）

（注：你的解法完整正確。）

④編號 2036 所得的結果不知是否還有其他的解，自己又找不出來，希望不吝賜教；2040 題作法似乎太繁雜，不知是否有較簡便的方法？另外要感謝老師的鼓勵，讓我學習如何去思考，並不再感到徵答題是遙不可及的，今後也會多加努力（花蓮高中，黃博翔。）

（注：請參考 2036 之二種解法。）

⑤經過半年來通訊解題的訓練，數學程度進步良多，如沒有平時腦力激盪，再好的資質也會漸漸消散。另外 2036 題可深入研究：

$\begin{cases}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=1+y^{2^n-1}\\(1+y)(1+y^2)\cdots(1+y^{2^n})=1+x^{2^n-1}\end{cases}$，$n\in N$ 時之解爲何？是否仍是(0,0)和(－1,－1)呢？還有 2037 有點出錯的感覺，可能其中必有詐吧？！（雄中，蔡孟根。）

（注：請繼續努力，自己要有更大的信心才對。）

⑥編號 2036、2037 應屬簡易題，而 2038 的立體圖形有點抽象，不知如何著手。（雄中，陳皇宇。）

（注：高二上還會有機會學立體幾何的體材，可先查高二上基礎數學第一章。）

⑦面對這種問題（編號 2037），反而以更謹慎的心態去面對，輕視的後果就是失敗的到來！（雄中，羅皓維。）

⑧這次題目算容易，除了 2040 我用討論的方法很耗時間之外，其於的題目技巧不深，但是 2036 中，應可用其圖形對稱 $x=y$ 去解，但是很難說明交點在 $x=y$ 上，因爲不合的例子很多，所以沒去嘗試，2040 這題我很期待不用討論的方法，因爲討論一旦過多，就失去解題的趣味而落入機械般的枯燥過程。（台師大附中，賴柏翔。）

⑨◆雖然我能力不足，但對於 2037 題仍感到意外，因爲他出奇的容易，不似徵答題應有的水準，直到將答案傳真，我仍覺得是否我會錯題意了。

◆前一期徵答我寫出了三題，是用傳真的，可是一直沒收到 209 期科教月刊，到了這一期快截止才在圖書館看到，209 期中有人提到會將學生答案訂正寄回，不知是否有這回事。（桃園高中，黃義淸。）

（注：整理統計完成，會將你的答案寄回的。）

⑩編號 2040 之最後一步驟是最麻煩且容易出錯的地方，而我的檢驗方式亦有些麻煩，但總比把每一組 720 種排列方法列出來再逐一比較佳，所以對自己算出的答案沒把握，我相信一定有更好的方式。（屏東高中，董正隆。）

⑪此次徵答，覺得 2037、2039 出得太簡單，應屬普通試題，覺得應加深難度，以期提升自我數學能力。（雄中，林家平。）