

通訊解題發掘數學資優生並培養競賽能力

期末測驗題

設計者：通訊解題試題研究小組

注意事項：

- (1) 本試卷共分成兩部分，第一部分有 6 題，每題 12 分，第二部分有 2 題，每題 14 分，滿分共 100 分。第一部分每題的答案均為 0 到 2000 之間的整數；第二部分須詳細寫出計算或證明過程。
- (2) 每題答案請寫在答案紙上，在答案卷上第一部分有四小格，如下：

1.

2.

⋮

作答方式：如果"答案為 123"時，就在答案格上寫

0	1	2	3
---	---	---	---

如果"答案為 3390"時，就在答案格上寫

3	3	9	0
---	---	---	---

- (3) 考試時間：七十分鐘。
- (4) 計算紙必須連同試卷交回。
- (5) 不可使用計算器。
- (6) 若已依照上述規則作答，可在 6 月 30 日前寄回，批改後寄還。

第一部分：填充題（每題的答案均為 0 到 2000 之間的整數）：

1. 方程式 $x^2 - y^2 = 420$ 有多少組正整數解 (x, y) ？
2. 在銳角三角形 ABC 中，自 A 點作 \overline{BC} 邊上之高交 \overline{BC} 於 D 點，自 B 點作 \overline{CA} 邊上之高交 \overline{AD} 於 H 點，已知 $\overline{AD}=4$ ， $\overline{BD}=3$ ， $\overline{CD}=2$ ，則 $100 \overline{HD}$ 最接近哪一個整數？
3. 設 x, y 為兩絕對值相異的實數且滿足下列聯立方程組：
- $$\begin{cases} x^3 = 11x + 3y \\ y^3 = 3x + 11y \end{cases}, \quad \text{試求出 } (x^2 - y^2)^2 \text{ 之值。}$$
4. 若將 $(1+x+x^2)^{25}$ 展開，依升幂排列後之係數依序為 a_0, a_1, \dots, a_{50} ，則 $\sum_{j=1}^{25} a_{2j-1}$ 除以 9 之餘數為何？

5. 有一個五位數被某個二位數整除，計算過程如下：

$$\begin{array}{r}
 \square 8 \square \\
 \square \square \overline{) \square \square \square \square \square} \\
 \underline{***} \\
 \quad ** \square \\
 \quad \underline{**} \\
 \quad \quad *** \\
 \quad \quad \underline{*** \square} \\
 \quad \quad \quad *** \\
 \quad \quad \quad \underline{***} \\
 \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

已知所得商數是三位數且其十位數字是 8，試求商數為何？（注意：每一個“□”和“*”表示 0~9 中某一數字，各□和各*中之數可能相等或相異。）

6. 設一凸多面體之各面共由 12 個正方形、8 個正六邊形及 6 個正八邊形組成，且知多面體的每一個頂點有一個正方形、一個六邊形及一個八邊形通過，試確定這個多面體之兩兩頂點連接成之線段有多少條在這個多面體的內部？

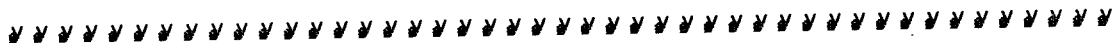
第二部分：計算、證明題（須詳細寫出計算或證明過程）：

7. a, b, c, d, e 均為正實數，

試證 $a^8 + b^8 + 2c^4 + d^2 + e \geq 4\sqrt{abcde}$ 。

8. 令 $[x]$ 表不大於 x 的最大整數，

試求出 $4x^2 - 40[x] + 101 = 0$ 所有的實數解。



期末測驗題答案卷

學校：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

注意：請依試題卷上作答的規定作答

第一部分：填充題（每題的答案均為 0 到 2000 之間的整數）

1. □□□□

4. □□□□

2. □□□□

5. □□□□

3. □□□□

6. □□□□

第二部分：計算、證明題（須詳細寫出計算或證明過程）