兩則函數方程的探討及推廣

陳明揚
臺北市立建國高級中學

前年四月間，筆者很榮幸地獲選為 1996 年國際數學奧林匹亞競賽(以下簡稱 IMO)中華民國代表隊員。代表隊一共有隊員六人，分別來自全國不同的四個學校，在四月至六月期間，接受了將近三個月的培訓。在那次的訓練裡，筆者才深入地接觸了函數方程這門數學。起初對函數方程相當陌生，每次看到這類的題目都不知如何下手，但很幸運地認識了當時也同為國手的臺南一中張懷良同學(現為成功大學數學系一年級，以下簡稱張同學，我們也同時是 1997 年 IMO 國手)，由於他已經接觸過這類有關代數關係的數學知識，因此筆者有不會的地方，常常都會請教於他，也因為如此，筆者也漸漸地對函數方程產生濃厚的興趣。因此一直到現在，一有閒暇，都會自己出一些函數方程的題目來做。這次在本篇所寫的第一題，是在 1997 年 IMO 培訓期間，張同學和筆者對一則函數方程的推廣。第二題是在 1997 年 IMO 比賽期間，因為認識了一位紐西蘭的華裔選手，比賽結束後，仍常交換題目討論，有一次她問到一題 IMO 的預選題，在解出原題之後，筆者嘗試一般性的推廣，結果也得到不錯的結論。今年是筆者最後一次參加數學競賽，希望在步入另一個學習的階段之前，能有美好的結果及回憶。

問題一： 已知 $f:K\to K$(K 為一個體),定義關於 f 的記號 g 為對於任意 t 個在 K 中的數

$$x_1,x_2,\ldots,x_t\ ,\ \text{則}\ g(x_1,x_2,\ldots,x_t)=x_1+f(x_2+f(x_3+\ldots+f(x_t))\ldots),$$

則我們有下列的問題:找出所有滿足 $f(g(x_1,x_2,\ldots,x_t))=g(x_t,x_{t-1},\ldots,x_1)$ (t 為大於 2 的正整數)的函數 f.

解: $\because f(f(g(x_1,x_2,\ldots,x_t)))=f(g(x_t,x_{t-1},\ldots,x_1)=g(x_1,x_2,\ldots,x_t),\ \forall\, x_1,x_2,\ldots,x_t\in K.$

且由 g 的形式可知當 $x_1,x_2,\ldots,x_t$在 K 變動時, g 的值域為 K.

$\therefore$我們可以得到 $f(f(x))=x,\ \forall\, x\in K\ldots\ldots$①,

又由條件,可得 $-x_t+f(g(x_1,x_2,\ldots,x_t))=f(g(x_{t-1},\ldots,x_1))$,

即 $g(-x_t,x_1,\ldots,x_{t-1}+f(x_t))=f(g(x_{t-1},\ldots,x_1))$,

$\therefore g(x_{t-1}+f(x_t),x_{t-2}\ldots,x_1,-x_t)=f(g(-x_t,x_1,\ldots,x_{t-1}+f(x_t)))=f(f(g(x_{t-1},\ldots,x_1)))=g(x_{t-1},\ldots,x_1)$,

令 $x_1=x_2=\ldots=x_{t-1}=0$ 得 $f(x_t)+f^{(t-1)}(-x_t)=f^{(t-2)}(0)$,即 $f(x)+f^{(t-1)}(-x)=f^{(t-2)}(0),\ \forall\, x\in K\ldots$②.

(1).若 t 是奇數,由①及②可得 $f(x)=x+f(0)$, $\forall x\in K$,代回

$f(g(x_1,x_2,\ldots,x_t)) = g(x_t,x_{t-1},\ldots,x_1)$可得:(從內部展開)

$x_1+x_2+\ldots+x_{t-1}+x_t+t\,f(0)=x_t+\ldots+x_2+x_1+(t-1)\,f(0)$,

$\therefore\ t\,f(0)=(t-1)f(0)$由①得 $f(0)=0$, $\therefore f(x)=x$,即 f 爲恆等對應(*identity mapping*).

代回檢驗也正確。

(2)若 t 是偶數,我們可以推得問題的等價條件:

(i) $f(f(x))=x$,(ii) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x, y\in K$

先證必要性,(i)即①,現證(ii).由①及②可得:

$f(x)+f(-x)=0$, $\therefore f(x)=-f(-x)$,代 $x=0$ 可知 $f(0)=0$.

將 $f(g(x_1,x_2,\ldots,x_t))=g(x_t,x_{t-1},\ldots,x_1)$中,令 $x_3=x_4=\ldots=x_t=0$,

得:$f(x_1+f(x_2))=f^{(t-2)}(x_2+f(x_1))=x_2+f(x_1)$,

$\therefore\forall\ x_1,x_2,x_3\in K$,我們有 $x_1+f(x_3+f(x_2))=x_1+x_2+f(x_3)$,

$\therefore f(x_1+f((x_3+f(x_2))))=f((x_1+x_2)+f(x_3))$,

$\therefore f(x_1)+x_3+f(x_2)=f(x_1+x_2)+x_3$, $\forall\ x_1,x_2\in K$.

$\therefore\forall x, y\in K$, 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

再證充分性,若 $f: K\to K$ 且滿足(i),(ii), 因爲滿足條件(i)

則 $g(x_1,x_2,\ldots,x_{2t})=x_1+f(x_2+f(x_3+\ldots+f(x_{2t}))\ldots)=x_1+f(x_2)+f(f(x_3+f(x_4\ldots f(x_{2t}))\ldots)$

$=x_1+f(x_2)+f(f(x_3)+f(f(x_4+\ldots f(x_{2t}))\ldots)=x_1+f(x_2)+f^{(2)}(x_3)+f(f(f(x_4+\ldots f(x_{2t}))\ldots)$

$=\ldots\ldots=x_1+f(x_2)+f^{(2)}(x_3)+\ldots+f^{(2t-1)}(x_{2t})$

$\therefore\ f(g(x_1,x_2,\ldots,x_{2t}))=f(x_1+f(x_2)+\ldots+f^{(2t-1)}(x_{2t}))$

$=f(x_1)+f^{(2)}(x_2)+\ldots+f^{(2t)}(x_{2t})=f(x_1)+x_2+f(x_2)+\ldots+x_{2t}$

$=x_{2t}+f(x_{2t-1})+f^{(2)}(x_{2t-2})+\ldots+f^{(2t-1)}(x_1)=g(x_{2t},x_{2t-1},\ldots,x_1)$.

在(2)中處理 $f(x_1+f(x_2))=x_2+f(x_1)$這個函數方程時，用到一個較特殊的技巧：兩邊加一新變數後再取一次函數值，此一方法在 1992 年 IMO 的問題二中，大會所提供的參考解答就曾經出現過，它是一種充分運用原本所給的函數關係所得到的，而使原函數方程轉變成較普通的二元函數方程. 令外像對於函數 $f(x)$是定義在所有實數上的實數值函數，且對於任意的實數 x, y 滿足 $f(f(x)+y)=x+f(f(y))$，則先代 $y=0$，得 $f(f(x))=x+f(f(0))$，所以 $f(f(y))=y+f(f(0))$,對所有實數皆成立。所以 $f(f(x)+y)=x+y+f(f(0))$…………………… (*),類似地用上述方法處理，則 $f(z+f(f(x)+y))=f((x+y+z)+f(f(0)))$，所以由(*)知 $z+f(x)+y+f(f(0))=x+y+z+f(0)+f(f(0))$，所以 $f(x)=f(0)+x$，令 $a=f(0)$，則 $f(x)=x+a$ 代回檢驗也合，所以 $f(x)=x+a$.

還有很多例子都能利用它使原來較複雜的式子變爲簡單許多。從上面可觀察出它是一種化繁爲簡的手法，這也是數學研究中常用的策略。

問題二:

試確定對任意給定的自然數 m 及 n 是否存在函數 $f: R \to R$ 及 $g: R \to R$ 滿足 $f(g(x)) = x^n$, $g(f(x)) = x^m$, 對所有的實數 x? (原題是問 m=2, n=3 及 m=2, n=4 的特例)

解: (1)當 n 和 m 的奇偶性不同時，不存在函數 f:R→R 及 g:R→R 滿足 $f(g(x)) = x^n$, $g(f(x)) = x^m$, 用反證法，若存在，不失一般性我們可令 n 爲偶數及 m 爲奇數。 $\because f(g(f(x))) = f(x)^n$, $g(f(g(x))) = g(x)^m$, $\therefore f(x^m) = f(x)^n$, $g(x^n) = g(x)^m$.
代 x=0, 1, -1,可得 $f(0), f(1), f(-1)$此三數都滿足和其自己的 n 次方相等，因爲 n 爲偶數，因此這三數都必須是 0 或 1. 由 m 爲奇數，我們知道 $g(f(x))$ 是一個一對一函數。但由鴿籠原理，可知 $f(0), f(1), f(-1)$三數中至少有兩數相等。所以 $g(f(0)), g(f(1)), g(f(-1))$三數中也至少有兩數相等. 所以 0, 1^m,$(-1)^m$ 三數中也至少有兩數相等.. 由 m 爲奇數，因此矛盾，所以不存在。

(2)當 n 和 m 皆爲偶數，存在無限多組函數 f:R→R 及 g:R→R 滿足 $f(g(x))=x^n$, $g(f(x))=x^m$, 對所有的實數 x。

對每一個大於 1 的實數 x, 令

$$F(x) = k^{[n(\log_r x)^{(\log_n m)^{-1}}]}, G(x) = r^{[(\log_k x)^{\log_n m}]}$$

k, r 爲兩個大於 1 的實數. 更進一步令

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), 當 x \in (1,\infty) \\ 1, 當 x = 1 \\ \dfrac{1}{F(\frac{1}{x})}, 當 x \in (0,1) \end{cases} \quad ; \quad G_1(x) = \begin{cases} G(x), 當 x \in (1,\infty) \\ 1, 當 x = 1 \\ \dfrac{1}{G(\frac{1}{x})}, 當 x \in (0,1) \end{cases}$$

不難得到 $F_1(G_1(x)) = x^n$, $G_1(F_1(x)) = x^m$, 對於每一個實數 $x \in (1,\infty)$.

又 $F_1(G_1(1)) = 1$, $G_1(F_1(1)) = 1$. 若 $x \in (0,1)$, $F_1(G_1(x)) = \dfrac{1}{F_1(G(\frac{1}{x}))}$.

$\because \frac{1}{x}>1$ 及 $\log_k \frac{1}{x}>0$，$\therefore G(\frac{1}{x}) = r^{(\log_k \frac{1}{x})^{\log_n m}} > 1.$

$$\therefore F_1(G_1(x)) = \frac{1}{F_1(G(\frac{1}{x}))} = x^n.$$

同理 $G_1(F_1(x)) = x^m$, 對於每一個實數 $x \in (0,1)$.

再令 $f(x) = F_1(|x|)$, $g(x) = G_1(|x|)$, 且 $f(0) = g(0) = 0$, 則當 $x>0$ 時,

$$f(g(x)) = F_1(G_1(x)) = x^n,\ g(f(x)) = G_1(F_1(x)) = x^m,$$

當 $x<0$ 時, $f(g(x)) = F_1(G_1(-x)) = (-x)^n = x^n$, $g(f(x)) = G_1(F_1(x)) = (-x)^m = x^m$

(n 和 m 皆爲偶數), 且 $f(g(0)) = F_1(G_1(0)) = 0$, $g(f(0)) = G_1(F_1(0)) = 0$.

所以滿足條件。

(3) 當 n 和 m 皆爲奇數,令

$$f(x)=\begin{cases} F_1(x), 當\ x>0 \\ 0, 當\ x=0 \\ -F_1(-x), 當\ x<0 \end{cases} \quad ; \quad g(x)=\begin{cases} G_1(x), 當\ x>0 \\ 0, 當\ x=0 \\ -G_1(-x), 當\ x<0 \end{cases}$$

由(2)我們已經知道 $f(g(x)) = x^n$， $g(f(x)) = x^m$, 對於每一個實數 $x \geqq 0$.

若 $x<0$, 則 $f(g(x)) = -F_1(-g(x)) = -F_1(G_1(-x)) = -(-x)^n = x^n$, $((-x)>0, n$ 爲奇數)。

同理 $g(f(x)) = x^m$ 對於每一個實數 $x<0$, 所以也滿足條件。

換言之, 當 n 和 m 皆爲奇數時, 也存在無限多組函數 f : R→R 及 g : R→R

滿足 $f(g(x)) = x^n$, $g(f(x)) = x^m$, 對所有的實數 x.

因此我們得到：

若 n 和 m 有相同的奇偶性時, 存在無限多組 $f(x), g(x)$ 滿足 $f(g(x)) = x^n$, $g(f(x)) = x^m$, 對所有的實數 x.

若 n 和 m 的奇偶性不同時, 不存在 $f(x), g(x)$ 滿足 $f(g(x)) = x^n$, $g(f(x)) = x^m$, 對所有的實數 x.

參考資料：

陳昭地(民八十二年)，一九九二年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽解答評析，國際數學奧林匹亞(I)，國立臺灣師範大學科學教育中心，77~98.