

動態的勾股定理 — 電腦輔助教學環境

林保平

臺北市立師範學院 數理教育學系

人們對勾股定理有不同的理解，其表達方式也有不同（梁，民 84），「形」的勾股定理指的是「拼補相等」— 股上的兩個正方形經切割之後，可拼補成斜邊上的正方形。形的勾股定理可進一步看成「面積」的勾股定理 — 兩股上正方形面積之和為斜邊上正方形的面積（這些正方形分別簡稱勾方、股方及弦方）。「數」的勾股定理是指兩股長度平方的和為斜邊長度的平方，此時，它是數的關係，並無面積或幾何形狀的意義。勾股定理的教學可以從直觀的圖形切割及拼圖下手，提供學生經驗勾股定理在形及面積上的意義的機會，作為瞭解數的勾股定理及其推廣意義的基礎。本文擬從圖形的切割拼補為起點，介紹一套可供教師教學使用的勾股定理電腦輔助教學環境（程式），這些程式架構在動態幾何軟體 Geomator's Sketchpad (Jackiw 1991, 簡稱 GSP) 上，執行本軟體之後，再開啓這些程式，就可以使用。本文將介紹兩個環境，一為「勾股性質」教學環境，一為「歷史的勾股關係」探討環境，前者提供了切割、拼圖的環境，可作為直觀介紹及探討形及面積關係的勾股性質，以及從圖形的「等積變換」來探討驗證性質的正確性，對於面積關係理解之後，將面積關係轉化成邊長（數）的平方關係就變成十分自然了；後者，提供直角三角形三邊所形成的三個正方形，作為操作對象，透過它們的位置排列及面積關係來探討直角三角形三邊的恆等關係，檢驗周髀算經趙爽注的「勾股方圓圖說」的部份內容。

一、基本環境及學習架構

GSP 是一個動態幾何軟體，提供了基本幾何作圖工具，具有尺規作圖、圖形可變異或動態連續變換、保持結構、特殊即一般、記錄作圖過程等特質（林，民 85, 民 86），這些功能及特質，不只能提供精確的幾何圖形，而且能協助教師提供方便操作、易於探討圖形性質的教學及學習環境。使用者可用滑鼠拖曳點、線...等利用幾何作圖功能畫出的「幾何圖形」的構成成分，改變幾何圖形的形狀，但圖形的預設幾何關係永不改變。GSP 本身就是有利探討幾何性質的一般環境，利用這些一般功能，我們可以設計出針對主題的教學及學習環境，勾股性質的相關學習環境就是利用它所提供的功能設計出來

的。基本上我們設計的環境都設有按鈕，以減少使用者對 GSP 一般環境功能的依賴，只要連續按鈕兩次，程式便會自動執行該按鈕預設的功能，學生只要瞭解滑鼠的選取、拖曳、及連按等功能，就能操作及探討環境。所有畫面上的物件（幾何圖形、按鈕、文字說明…）都可自由移動或隱藏起來，教師可以配合教學的需要，留下必要呈現的內容。

二、「勾股性質」教學環境

本環境含有五個模式：勾股板 1、勾股板 2、勾股釘板、相補證明、移轉證明，連按這些按鈕即可進入這些情境模式（圖 1，見封底）。

(1) 勾股板 「勾股板 1」及「勾股板 2」是可在螢幕上操作的勾股拼圖板環境，我們將弦（或勾、股）所形成的正方形切割，作為拼圖板，學生可利用滑鼠平移或旋轉這些拼圖板，拼湊成勾、股、或弦所形成的正方形（即勾方、股方、及弦方），讓學生從實際操作中「經驗」幾何圖形的平移及旋轉、正方形的拼補、三個正方形面積的關係、以及三個正方形位置變異的情況。連按「直角三角形」鈕，程式將自動平移及旋轉勾股弦三個正方形使其圍成直角三角形，連按「水平」鈕，程式會將三個正方形旋轉成底邊水平之情況。教學時，教師可請學生將所有的拼圖板拼成大正方形（弦為邊）或取部份圖板拼成次大的正方形（以股為邊），在必要時亦可給予提示，將兩個或三個拼圖板移至定位，使問題變得容易些。連按「拼合 1」或「拼合 2」鈕，程式可自動將拼圖板拼成弦方，或勾方及股方（圖 2，見封底）。

以切割勾方、股方或弦方互為拼補來說明勾股定理的切割方式很多，圖 2 右圖係將直角三角形斜邊上的正方形作平行或垂直於股的切割，這種切割是一般化的切割。若將直角三角形三邊上的正方形畫出，即可看出這種切割是平行或垂直於弦或股，圖 3（見封底）左圖顯示切割勾方及股方，右圖顯示切割弦方。

這種切割的基本原理，如圖 4 所示。圖中兩類小正方形邊長為直角三角形之股，大正方形為斜邊上的正方形，移動甲點可移動大正方形，此正方形與背景

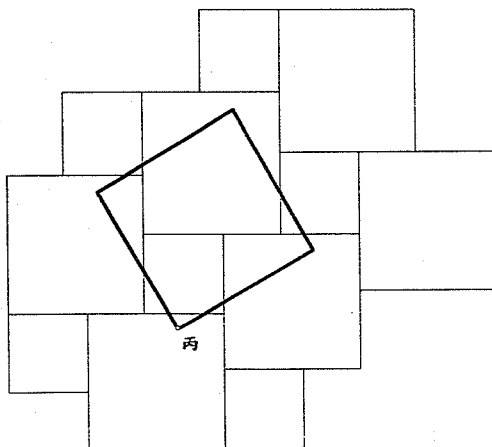


圖 4 垂直或平行於斜邊的切割原理

的兩類小正方形互相切割，形成的公共小切塊正好可拼補成直角三角形兩股上的正方形。

(2) 勾股釘板 在此環境下有面積探討、自由模式、及固定模式等三種子環境 (圖 5)，在本環境下，必須事先設定格子點 (在 GSP「Graph」項下選取「Snap To Grid」)。

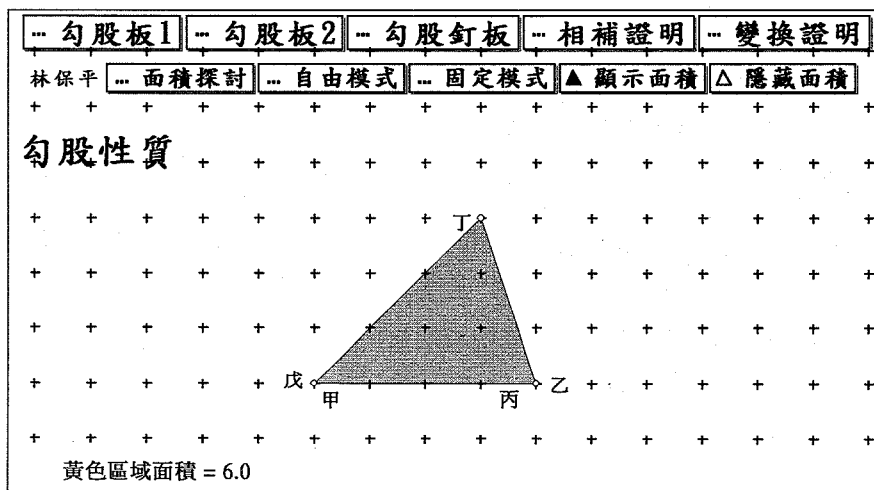


圖 5 「勾股釘板」模式下的「面積探討」子模式 (預設)

在「面積探討」子模式下，學生可探討五個點構成的多邊形面積，學生可隨意移動這些點，改變多邊形的形狀，各點也可重合，圖 5 即為甲戊、乙丙分別重合所構成的三角形。教師可設定若干圖形讓學生利用格子點，探討圖形面積的求法及等積異形之關係 (圖 6)，並引領學生探討格子點圖形求面積的一般方法。

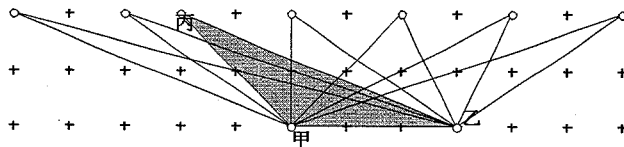


圖 6 水平移動丙點可幫助學生探討等積異形之面積關係

通常學生會利用「內割」法或「外補」法，「內割」是將圖形分割成基本的圖形，再求出基本圖形之面積和，但有時候，這些基本圖形的長、寬、高、...等相關資訊，無法從格子點看出，這時，「外補」法 (利用圖形的外接長方形面積扣除多補的三角形面積) 就展現其優勢了 (圖 7)。

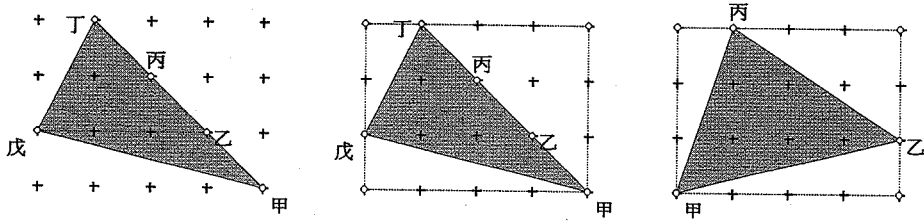


圖 7 可用內割（左）、外補（中）及不易以內割法（右）求面積的三角形

根據作者實驗，對不能馬上使用格子點資料的圖形，學生通常使用內割法，有時甚至使用十分複雜的切割，教學時提出不同的圖形例子，引導學生從「內割」探討到「外補」是理解格點面積求法的重要步驟，菱形或箏形應是十分有效的過渡例子（圖 8）。在學生理解如何利用格子點及外補的方法求面積的原理之後，求面積之過程就可交給電腦做了，按「顯示面積」及「隱藏面積」鈕可分別顯示或隱藏當時圖形面積之數值（圖 5）。

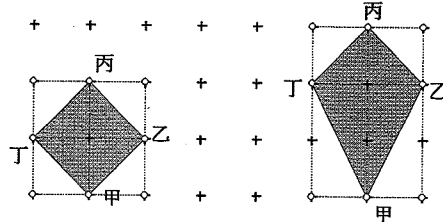


圖 8 菱形及箏形 — 引領學生由「內割」到「外補」的一個過渡例子

「自由模式」是一個引起動機的過渡模式，協助學生從自由圖形面積關係的探討，進入三角形及三邊上的正方形之面積關係之研究。程式將呈現甲、乙、丙、…、壬九點，可以使用滑鼠自由地移動這些點的位置，展現各種圖形關係，圖 9 顯示了三角形甲乙丙及其三邊上的四邊形，教師可逐漸引領學生將四邊形改成正方形，三角形改為直角三角形，作為進入「固定模式」之準備。

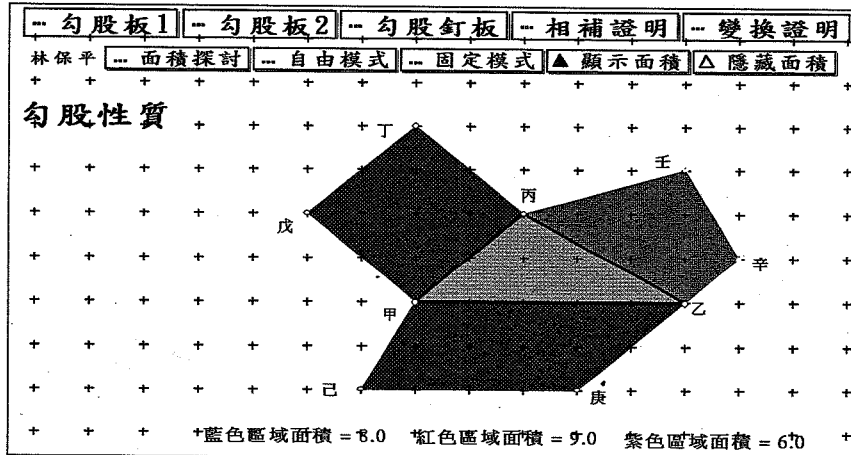


圖 9 自由模式下，三角形甲乙丙及另外三個四邊形

在「固定模式」下，甲乙丙三點可自由移動，但另外的點則為「固定」點，永遠構成以三角形三邊為邊的正方形，移動甲、乙、或丙點時，這些正方形會隨著三角形三邊之長度自動改變大小，輔以「顯示面積」之功能，學生可以十分容易地探討三角形及其三邊上正方形面積間的關係。教師可事先在格點紙上，畫出若干不同形狀的三角形（銳角、直角、或鈍角），請學生在電腦上移動甲、乙、或丙點，自行做出相同的形狀後，觀察及記錄三邊上正方形的面積，並歸納探討三角形三邊上正方形面積的關係，協助學生發現勾股弦性質（圖 10）。

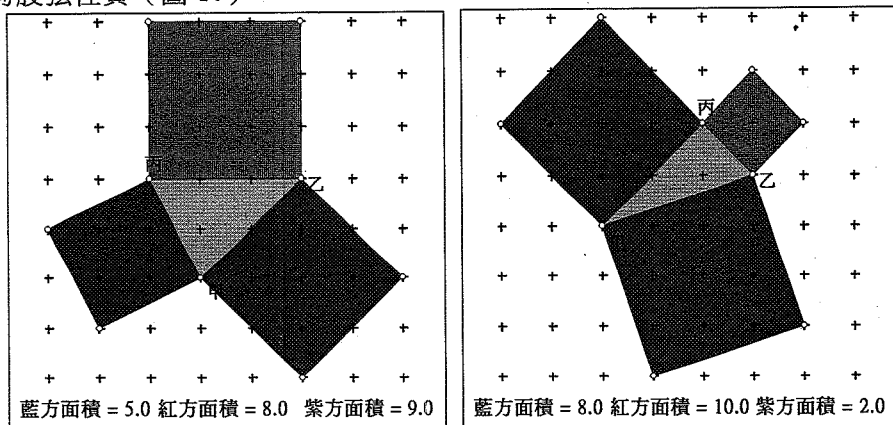


圖 10 改變三角形 ABC 為非直角及直角形時，三邊上正方形面積之關係

(3) 相補證明 在本環境下，學生可探討中國古代「弦圖」（周髀算經趙爽注）之勾股關係圖形證明。本環境基本上提供三個正方形，分別以勾股差（小正方形邊長）、弦、勾股和（大正方形邊長）為邊，另有一個弦方（以弦為邊的正方形）色板，及弦方切割而得的色板（圖 11），學生可將色板自由拼圖，探討此三方之關係。

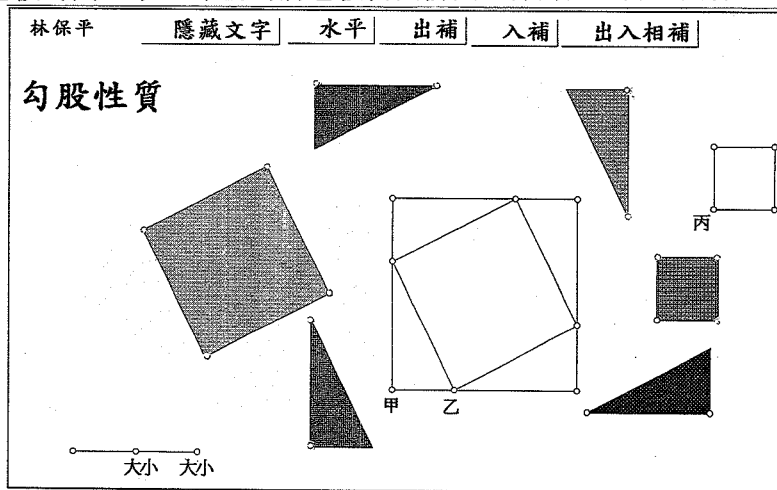


圖 11 色板及弦圖的基本架構

連接「入補」鈕，色板將自動平移（必要時也作旋轉），拼補出弦方之內部（圖 12 左），連接「出補」鈕，上述色板將自動拼補出勾股和所成正方形內部（圖 12 右）。若先連接「出入相補」鈕，可得弦圖之水平基本圖形（圖 11）。由弦圖我們可以用乘法關係式證明勾股定理，例如由「入補」之 $c^2 - 4 \times \frac{1}{2}ab = (a-b)^2$ 及「出補」之 $2c^2 - (b-a)^2 = (a+b)^2$ 均可由代數方法推出 $a^2 + b^2 = c^2$ ，其中 a 為勾長、 b 為股長、 c 為弦長。

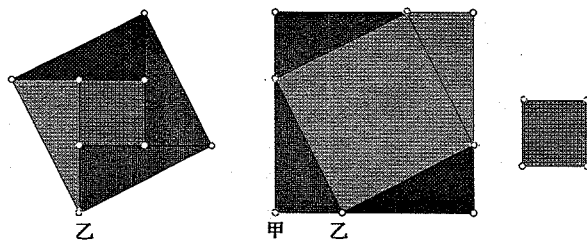


圖 12 將弦方切割，外補之後，可得大方（以勾股和為邊）及小方（以勾股差為邊）

（4）變換證明 面積觀點的勾股關係，有許多種驗證方式，前述分割拼補是最簡單的方式，變換證明是利用平移、旋轉、和切變變換來檢驗其面積關係。本環境有兩個子模式：切變平移及切變旋轉（圖 13）。

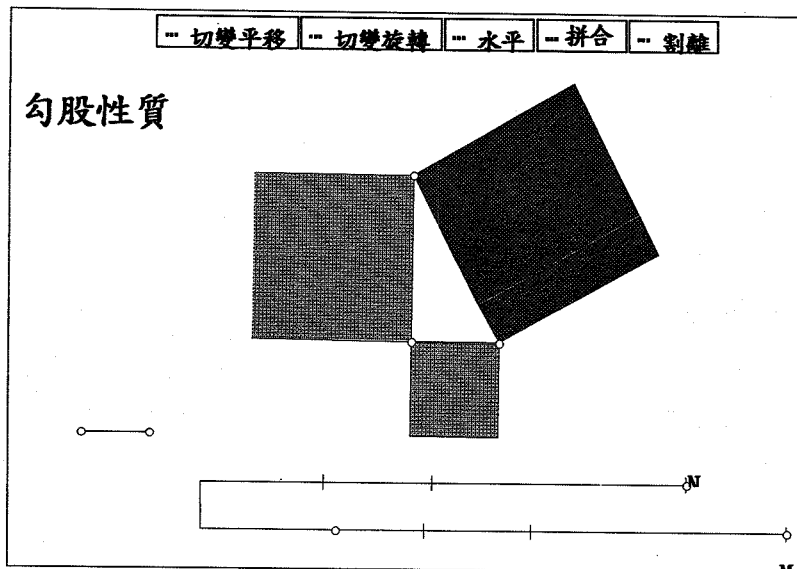


圖 13 變換證明的預設畫面

在本環境下，學生可以使用滑鼠水平移動 M 、 N 兩點，將弦方分割出來的兩個矩形，變換（平移、旋轉或切變）成勾方及股方。若 M 、 N 兩點是由右方移至左方，在「切變平移」子模式下，弦方上的矩形，先作平移，再作兩次切變，就變換成勾方或股方（圖 14）， M 、 N 分別控制一個矩形；

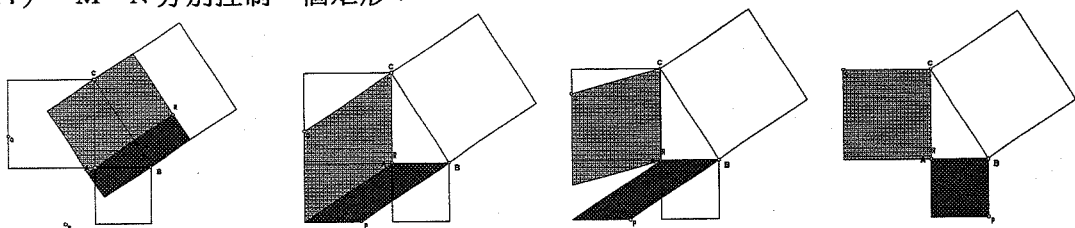


圖 14 平移和切變驗證勾股定理的面積關係

在「切變旋轉」子模式下，則先作切變，再作旋轉，最後再切變成勾方或股方（圖 15）。

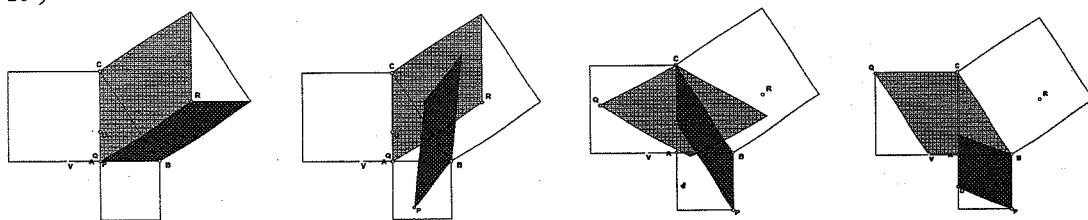


圖 15 切變和旋轉驗證勾股定理的面積關係

由於這些變換具有不改變面積的特質，學生可透過這些變換的展示，相當直觀地理解勾股弦三正方形的面積關係。教師在操作時可隨時停下來與學生討論，探究在各種變換下，其面積不改變的原因，也可以分段或重複操作，快慢隨意，由於所展示的過程是動態連續的變換，其互動的效能及特質是一般影片或展示無法具有的。此外，本程式可探討任一直角三角形的勾股關係，教師可以改變圖形的方位（移動螢幕上的一點「轉」）及勾股弦的長度（移動三角形三頂點），得到各種不同形狀、大小及方位的直角三角形，圖形改變後，這種變換仍可進行。教師亦可連按「分割」或「合併」，程式會同時自動移動 M 、 N 兩點作變換，教師亦可移動顯示幕上的點「速」（表示速度）來改變其自動變換過程的快慢。

三、歷史的勾股關係

數學歷史經常是引發學習興趣，幫助學生認識數學內涵的重要教材，有關勾股定理

的內涵，我國有十分豐富的歷史記錄，我國最早的天文算學書「周髀算經」中，就有勾股定理的記載，趙爽（字君卿，三國時代吳人）注釋周髀算經的「勾股圓方圖」說，短短五百餘字對勾股弦的一些關係式，做了幾何的證明，基本上這些勾股弦關係，都可由正方形板（勾、股、弦為邊所構成的）拼湊成的圖形觀察出來。我們針對部份關係，設計了一個動態圖形的電腦研習環境，配以趙爽注中的原文，來幫助教師及學生從圖形組合中，發現或探究勾股弦的關係，並欣賞中國傳統的數學成就。

本程式包含四個部份：勾實之矩、股實之矩、勾股弦差、弦圖。按鈕可進入上述四種環境（圖 16），預設的畫面（按「還原」鈕可隨時回此畫面）展示了勾股弦構成的三個正方形（簡稱勾方、股方及弦方，本文分別以 a 、 b 、 c 表示勾、股、弦長），教師及學生可用滑鼠平移或旋轉環境中的三個正方形，拼成能說明各種勾股關係的圖形，也可以將勾股弦作比例放縮（移動圖中「股」點），或改變勾股的長短比例（移動圖中「勾」點），弦之長短將配合勾股的改變自動調整，這樣可以得到任意直角三角形。

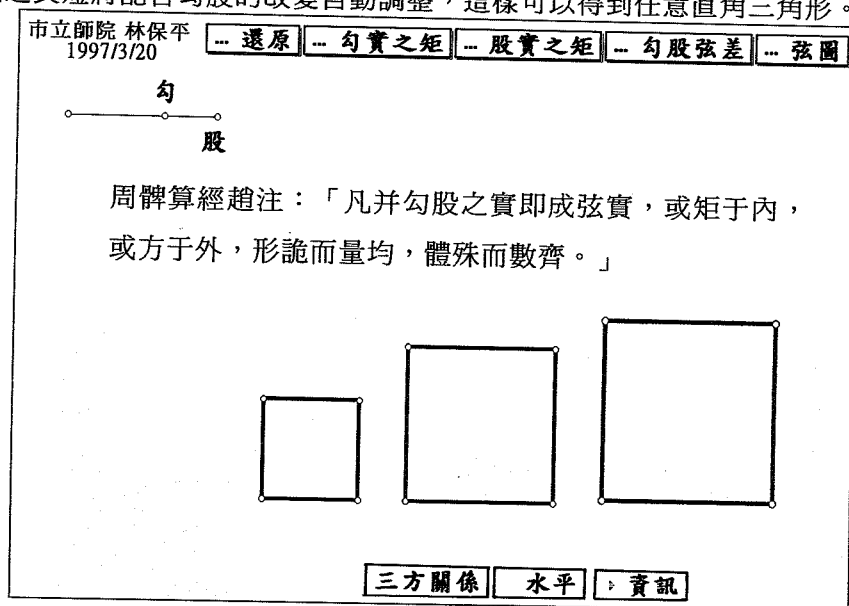


圖 16 周髀算經勾股關係探討環境

按「資訊」鈕可顯示或隱藏「注釋」原文，按「三方關係」鈕，程式會自動將三個正方形拼成直角三角形在內，三正方形在外的基本勾股弦關係圖形。

勾實之矩為趙爽注的用詞，指的是弦方扣除股方所構成的「矩形」（其面積就是勾方面積，故稱為勾實之矩）。按「勾實之矩」鈕，程式會將股方平移至弦方內，得曲「矩」（圖 17 左），教師或學生可向上移動股方，逐漸將曲「矩」改變為直「矩」（圖 17 右），

此直「矩」即為勾實之矩，因其面積與勾方相等，反向操作可回復原狀。

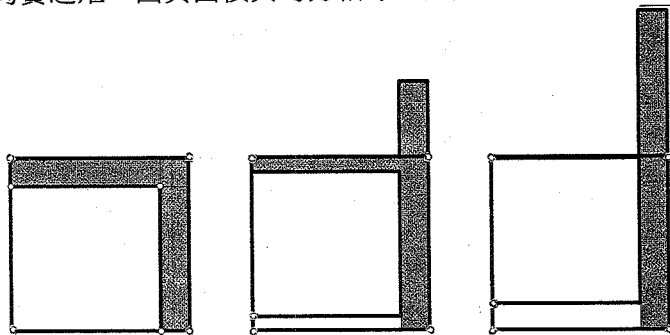


圖 17 勾實之矩—弦方減股方所得即勾方，左圖陰影部份為勾方，可用滑鼠拖曳漸次形成右方的勾實之矩，此矩形以股弦差 $(c-b)$ 為寬，以股弦和 $(c+b)$ 為長，注意股方弦方的位置。 $a^2 = (c+b)(c-b)$

直「矩」形成時，程式亦會同時呈現能探討此「矩」之長寬的三方關係圖（圖 18），可按「閃示」呈現兩種配置，此圖可幫助理解趙爽的注釋：「勾實之矩以股弦差為廣（長），股弦并為袤（寬），而股實方其裏。…令并自乘與勾實為實（被除數），倍并為法（除數），所得亦弦，勾實減并自乘如法為股。」若以 a 為勾， b 為股， c 為弦，本段所描述的就是

$$a^2 = (c+b)(c-b), \frac{(c+b)^2 + a^2}{2(c+b)} = c, \frac{(c+b)^2 - a^2}{2(c+b)} = b.$$

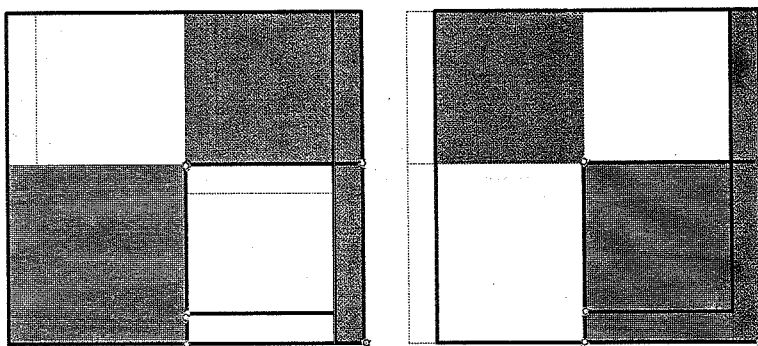


圖 18 左（右）圖顯示由股弦和的平方加上（減去）勾實之矩除以股弦和之二倍可得到弦（股）長的圖形，注意陰影所示弦方及股方之位置。

按「股實之矩」鈕可得類似的環境。

按「勾股弦差」鈕，勾方及股方將自動平移至弦方（圖 19），三方相重疊之處，構成一個正方形及兩個全等的長方形，兩個長方形面積之和恰為正方形面積，這正可以用

來說明或由學生探討直角三角形三邊的另一種關係。

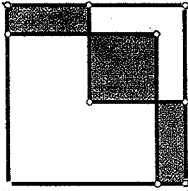


圖 19 將勾方、股方分別置於弦方的右上及左下角，如上圖，由勾股定理可看出，有陰影的中間方形之面積為 $(a+b-c)^2$ ，恰為另兩長方形面積之和 $2(c-a)(c-b)$ ，故 $\sqrt{2(c-a)(c-b)} = a+b-c$ 。

趙爽的注釋為：「兩差(勾弦差、股弦差)相乘，倍而開之，所得以股弦差增之為勾，以勾弦差增之為股，兩差增之為弦。」以公式表示為

$$\sqrt{2(c-a)(c-b)} = a+b-c, \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-b) = c, \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a) = b$$

按「弦圖」可得兩種「拼圖」方式，基本上均為由勾股弦三方形拼排後，填補而成，可按「拼補 1」及「拼補 2」兩鈕而得弦圖。「拼補 1」(圖 20)相應趙爽注：「倍弦實，滿外大方而多黃實，黃實之多即勾股差實，以差實減之，開其餘得外大方，大方之面即勾股并也。令并自乘，倍弦實乃減之，開其餘得中黃方，黃方之面，即勾股差。以差減并而半之為勾，加差于并而半之為股。」

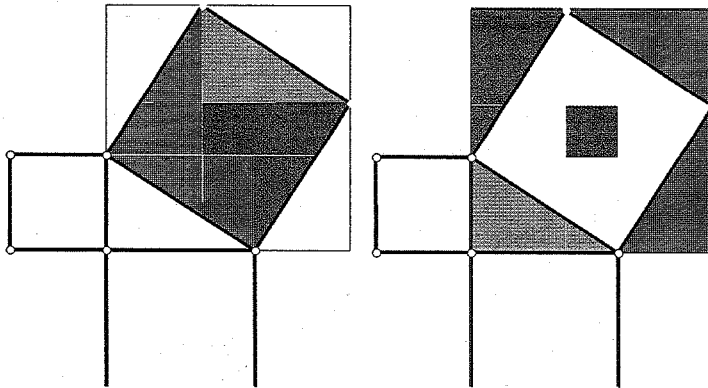


圖 20 弦圖(一) 將勾股弦三正方形排成上圖，切割(左圖)弦方，弦方中的四個直角三角形可外補(右圖)成以「勾股和」為邊的大正方形，故弦方面積的兩倍恰為「勾股和」方與「勾股差」方面積之和，亦即 $2c^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2$ ，本程式將閃示左右二圖。

亦即將弦方分割的四個直角三角形(左圖)平移至弦方之外與弦方正好拼成一個以勾股和為邊的正方形(右圖)，其面積恰比弦方之二倍少一小正方形(勾股差為邊)。以公式表之為

$$2c^2 - (b-a)^2 = (a+b)^2, \sqrt{2c^2 - (b-a)^2} = a+b, \sqrt{2c^2 - (a+b)^2} = b-a。$$

趙注後段之描述是求勾股之法，以式子表示為

$$\frac{\sqrt{2c^2 - (b-a)^2} - \sqrt{2c^2 - (a+b)^2}}{2} = a, \quad \frac{\sqrt{2c^2 - (b-a)^2} + \sqrt{2c^2 - (a+b)^2}}{2} = b。$$

「拼圖 2」（圖 21）相應九章算術劉徽之描述：「勾自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也，合成弦方之畧。」

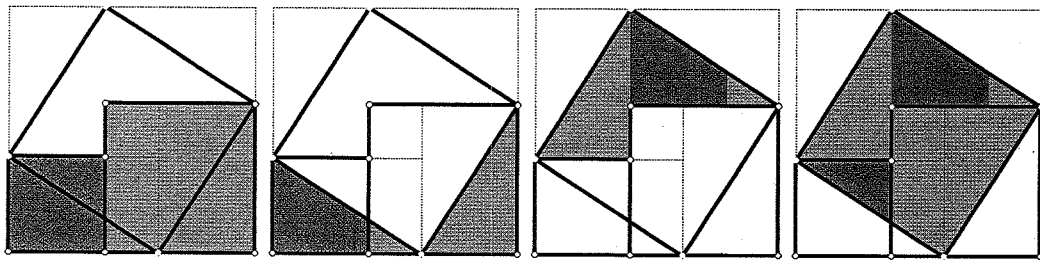


圖 21 弦圖（二） 將勾股弦三方形排成上圖（左），將弦方與勾股方不重疊之部分，切割拼補（中間二圖陰影部份），可將勾股兩方拼成弦方（右），故 $a^2 + b^2 = c^2$ ，本程式將閃示「出入相補」之部分（中間二圖），這個解釋只要平移切割之部分即可。

本程式在諸「方」就定位後，可閃示拼補之法，其所展示之「出入相補」拼補，與李潢（郭書春，民 84，P186）之解釋（圖 22）及李繼閔（民 81，P367）之解釋（圖 23）不同，但似乎更自然，只做兩直角三角形的平移（雖其中有一直角三角形已被分割）。

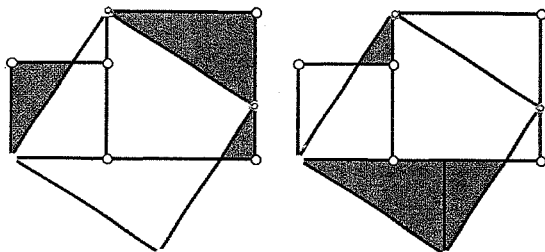


圖 22 李潢解釋的「出入相補」— 分別平移三個不同的圖形，較為複雜。

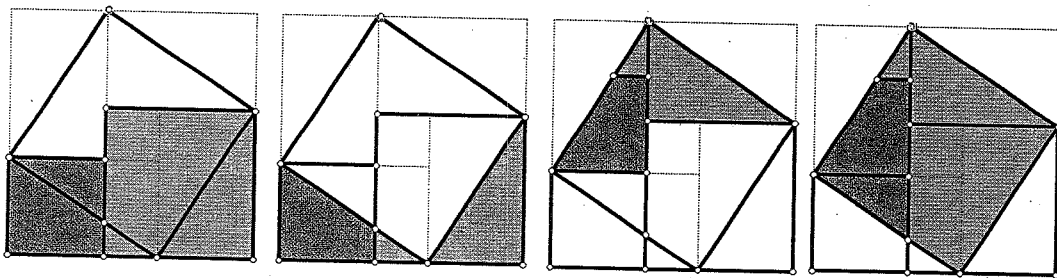


圖 23 李繼閔所描述的「出入相補」— 含平移及旋轉。

四、結語

本文介紹了動態的勾股定理電腦學習環境程式，「勾股性質」程式可以讓教師及學生從形及面積的觀點，拼圖、觀察、實驗、收集資料、發現勾股定理，且可利用面積關係、幾何變換，透過程式圖形的動態、連續、可重複操作等程式特性，協助學生由直觀起始，探討勾股定理的證明；「歷史的勾股關係」程式，將趙爽對周髀算經的「勾股圓方圖」注的部分內容融入其中，提供了教室操作及討論勾股定理相關性質的學習題材，可協助學生瞭解中國歷史上的勾股定理研究，及其推論的幾何方法及意義。本程式環境不採用傳統 CAI 的教學模式，而是以電腦當作教師教學或學生學習的工具，程式並不給予任何提示，也不作評量，這些工作都需要教師根據程式提供的功能，於教學時以問題的方式提出，以討論或實驗操作的方式進行。教師應根據學生的程度，提出討論的問題，例如若學生對代數方式的探討有困難，則可就數值特例，配以圖形幫助學生理解；若學生對文言的字句不易瞭解，則可將重點放在勾股定理的歸納發現或數值的求解討論上；至於變換證明則可從直觀的等積變換下手，將變換過程的重點用幾何方法列出，就是證明。

參考文獻

- 李繼閔 (民 81). 《九章算術》及其劉徽注研究 p.367。台北，九章出版社。
- 林保平 (民 85). 動態幾何軟體在教學上的應用。八十四學年度輔導區地方教育輔導活動教師研討活動論文集，pp128-152。台北市立師院。
- 林保平 (民 86). 動態幾何教學的電腦輔助教材研究。八五年度國科會研究計畫報告，計畫編號：85-2511-S-133-004。台北市立師院。
- 梁宗巨 (民 84). 數學歷史故事，p.229。台北，九章出版社。
- 郭書春 (民 84). 古代世界數學泰斗－劉徽，p.186。台北，明文書局股份有限公司。
- 九章算術 算經十書。台北，台灣商務印書館。
- 周髀算經 算經十書。台北，台灣商務印書館。
- Jackiw, N. (1991). *Geometer's Sketchpad* (computer program). Berkeley, CA: Key Curriculum Press.