中學數學挑戰徵答題參考解答評析

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 2031

已知ΔABC之垂心為H，外心為O，$\overline{BC}$之中點為M。今自頂點A向$\overleftrightarrow{BC}$作垂線交$\overleftrightarrow{BC}$於F，若$HOMF$為矩形且$\overline{HO}=5.5$，$\overline{OM}=2.5$，試求$\overline{BC}$之長。

解答：解法（一）：

為方便計算，我們將ΔABC置於坐標平面上，以F點為原點，在x軸正向上取一點$M(5.5,0)$，y軸正向上取一點$H(0,2.5)$，取$O(5.5,2.5)$。因M是$\overline{BC}$的中點，不妨設B在M之右側。

令$\overline{BM}=x>0$，又由於$\overline{AF}\perp\overleftrightarrow{BC}$，故可設$A(0,y)$，$y>0$。值得注意的是在我們如上所設情形下，$C$點不管是位在$\overline{FM}$內或$F$之左側，其坐標表法均為$(5.5-x,0)$。

①$\because \overleftrightarrow{BH}\perp\overleftrightarrow{AC}$，由斜率關係可得$-\dfrac{2.5}{x+5.5}=-\dfrac{x-5.5}{y}$

即$x^2=2.5y+(5.5)^2$，$x>0$ ………………………………………… (*)

②$\because O$點是ΔABC之外心　$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

$\therefore (5.5)^2+(y-2.5)^2=x^2+(2.5)^2$，由(∗)

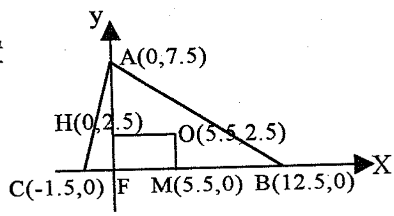
$\therefore (y-2.5)^2=2.5y+(2.5)^2$　$\because y>0$　$\therefore$解得$y=7.5$

再代回(∗)　解得$x=7$，即$\overline{BM}=7$

因$\overline{CM}=\overline{BM}=7>5.5=\overline{FM}$，所以$C$點正確位置在$F$之左側且其坐標為$C(-1.5,0)$。

③$\because M$是$\overline{BC}$中點，$\therefore \overline{BC}=2\overline{BM}=14$，

ΔABC置於坐標平面位置如圖所示。



解法（二）：（採自明倫高中吳宗龍之解法。）

連接 A，M，因$\overline{AH}=2\overline{OM}$，$\overline{OM}=2.5$，所以$\overline{AH}=5$

因 HOMF 為矩形，且 A、H、F 三點共線，所以$\angle AHO=90°$

因 O 為外心，所以$\overline{OA}=\overline{OB}$，因$M$為$\overline{BC}$中點，所以$2\overline{BM}=\overline{BC}$

$(\overline{BM})^2=(\overline{OB})^2-(\overline{OM})^2$，因$(\overline{OB})^2=(\overline{OA})^2$，$(\overline{OA})^2=(\overline{OH})^2+(\overline{AH})^2$

所以$(\overline{BM})^2=(\overline{OH})^2+(\overline{AH})^2-(\overline{OM})^2$，因$\overline{AH}=5$，$\overline{OH}=5.5$，$\overline{OM}=2.5$

代入得 $\overline{BM}=7$，又$2\overline{BM}=\overline{BC}$，所以$\overline{BC}=14$得解。

《解題重點》：

1.建立坐標系。

2. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow (L_1$斜率$)\times(L_2$斜率$)=-1$，其中$L_1, L_2$均非鉛直線。

3.若 ΔABC 之外心為 O 點，則 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 。

4.歐拉定理。

《評析》

1.本題配合幾何題材設計，屬簡易題型，高一學生徵答此題較高二學生多，也有二位國中生參與，計有北一女中尤善琦等 38 位學生參與（含中山國中柏盛峰、鳳山國中朱浩瑋二人）得分率 0.97，徵答者幾乎都得滿分，完全符合原先預期水準。

2.中山國中柏盛峰同學以相似三角形觀念解題，明倫中學吳宗龍更是直接找出題目所給條件得 $\overline{BM}^2=\overline{OH}^2+\overline{AH}^2-\overline{OM}^2=49$，乾脆俐落的解決此題。

問題編號 2032	設 ΔABC 為銳角三角形，F 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{CF}\perp\overline{AB}$；$M$ 是 $\overline{AC}$ 中點。 證明：若 $\overline{BM}=\overline{CF}$ 且$\angle MBC=\angle FCA$，則 ΔABC 為正三角形。

解答：解法(一)：令 $\overline{BM}=\overline{CF}=h$ ，因 M 是 $\overline{AC}$ 中點，$\therefore \overline{AM}=\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

①由題意知，$\angle MBC=\angle ACF=90°-\angle A$

$\therefore \angle ABM=\angle B-\angle MBC=\angle B-(90°-\angle A)=(\angle A+\angle B)-90°=90°-\angle C$

又 $\angle FCB=90°-\angle B$

②利用正弦定理，在 ΔAMB 中，

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\angle AMB}=\frac{h}{\sin\angle A}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\sin(90°-\angle C)} \cdots\cdots (*)$$

在 ΔBMC 中，

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(180°-\angle AMB)}=\frac{h}{\sin\angle C}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\sin(90°-\angle A)} \cdots\cdots (**)$$

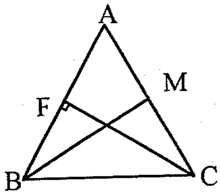
由 (*) (**) 可得 $\frac{b}{2h}=\frac{\cos\angle A}{\sin\angle C}=\frac{\cos\angle C}{\sin\angle A}\Rightarrow \sin 2\angle A=\sin 2\angle C$

$\therefore \angle A=\angle C$　或　$2\angle A=180°-2\angle C$

但當 $2\angle A = 180°-2\angle C$ 時，$\angle A+\angle C = 90° \Rightarrow \angle B = 90°$ 這說明 ΔABC 是直角三角形而與命題原設 ΔABC 爲銳角三角形顯然不符，

$\therefore \angle A = \angle C$ $\therefore \Delta ABC$ 是等腰銳角三角形。

$\therefore \overline{AB} = \overline{BC}$



③在 ΔACF 與 ΔCBM 中，

$\because \overline{BM}$ 是 $\overline{AC}$ 上之中線

且 $\overline{AB} = \overline{BC}$ $\because \overline{BM}$ 亦是 $\overline{AC}$ 上之高

$\therefore \angle BMC = 90° = \angle CFA$，

又已知 $\overline{BM} = \overline{CF}$，$\angle MBC = \angle FCA$

$\therefore \Delta ACF \cong \Delta CBM(ASA)$ $\therefore \overline{AC} = \overline{BC}$

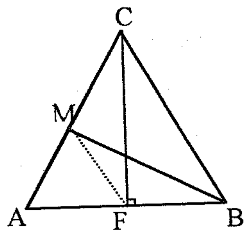
④綜合②③所得結果 $\therefore \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ 即 ΔABC 爲正三角形

解法(二)：（採自建中<u>陳明揚</u>等之解法。）

連 $\overline{MF}$，因爲 M 爲 $\overline{AC}$ 之中點，

且 ΔACF 爲直角三角形，$\therefore \angle FCA = \angle MFC$

又由 $\angle FCA = \angle MBC$ 知 $\angle MFC = \angle MBC$



$\therefore M$、F、B、C 四點共圓

$\therefore \angle CFB = \angle CMB = 90°$

$\therefore \overline{BM} \perp \overline{AC}$，$\therefore \overline{BC} = \overline{BA}$

又 $\overline{BM} = \overline{CF}$，$\therefore \overline{AC} = \dfrac{2\Delta ABC}{\overline{BM}} = \dfrac{2\Delta ABC}{\overline{CF}} = \overline{AB}$

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$，$\therefore \Delta ABC$ 爲正三角形

《解題重點》：

1. $\angle MBC = 90°-\angle A$；$\angle ABM = 90°-\angle C$；$\angle FCB = 90°-\angle B$。

2. 正弦定理。

3. $\Delta ACF \cong \Delta CBM(ASA)$。

《評析》

1. 本題亦屬幾何題，徵答人數及成績都略高於前題，亦屬簡易題型，計有金門高中<u>翁克全</u>等 42 人參與徵答（含中山國中<u>柏盛峰</u>、台師大附中國中<u>陳泊寧</u>二人）顯示國內數學資優生幾何問題之能力與興趣頗佳。

2. 此題是參與徵答者幾乎滿分之題，解法不外乎純幾何法及三角法，尤以純幾何

法居多，解題品質佳者均能先證 F、M、C、B 四點共圓來作答。

3.中山國中柏盛峰用二種方法（證四點共圓及三角法）來答題，雄中黎冠成用 11 種方法解題，幾乎是因輔助線的取法不同解法就不同來作答。

問題編號 2033

設 k，l，m，n 爲自然數且 $k<l<m<n$。

證明：若 $kn=lm$，則 $(\frac{n-k}{2})^2 \geq k+2$。

解答：因 k，l，m，n 爲自然數且 $k<l<m<n$，

所以可令 $l=k+a$，$m=k+b$，$n=k+c$，其中 a，b，c 爲正整數且 $1 \leq a<b<c$

①由 $kn=lm$ 得 $k(k+c)=(k+a)(k+b)$，

$\therefore kc=k(a+b)+ab<k(a+b)$

$\therefore c>a+b$，又因 a，b，c 爲正整數，

故 $c-a-b \geq 1$。

②$\because kn=lm$

$\therefore (n+k)^2-(m+l)^2=(n-k)^2-(m-l)^2=[(n-k)+(m-l)][(n-m)+(l-k)]>0$

$$
\begin{aligned}
\therefore (n-k)^2 &= (n+k)^2-4ml \\
&> (n+k)^2-(m+l)^2 \\
&= [(n-m)+(k-l)][k+l+m+n] \\
&= (c-a-b)[k+(k+a)+(k+b)+(k+c)] \\
&\geq 1\cdot[k+(k+1)+(k+2)+(k+3)] \\
&= 4k+6
\end{aligned}
$$

$\therefore (n-k)^2>4k+6$

③因任一整數平方後以 4 除之不可能餘 2 或 3，

$\therefore (n-k)^2 \geq 4k+8$

即 $(\frac{n-k}{2})^2 \geq k+2$，故得證。

《解題重點》

1.令 $l=k+a$，$m=k+b$，$n=k+c$，其中 a，b，c 爲正整數且 $1 \leq a<b<c$。

2.由 $kn=lm$ 得 $k(k+c)=(k+a)(k+b)$　　$\therefore c>a+b$

因 a，b，c 爲正整數　$\therefore c-a-b \geq 1$

3. $(n-k)^2=(n+k)^2-4ml>(n+k)^2-(m+l)^2$

$=(c-a-b)[k+(k+a)+(k+b)+(k+c)]\geq 4k+6$

《評析》

1. 本題屬簡易數論條件不等式題型，參與徵答人數比前二道題顯著減少，僅有北一女中曾于容等 26 人（含中山國中柏盛峰一人）惟得分率 0.96 仍高。
2. 解法幾乎大同小異，大概可分成二種，一是和參考答案類似的方法，另一則是由 $kn=lm$ 入手，得 $\frac{n}{l}=\frac{m}{k}=\frac{p}{q}$，$(p,q)=1$來做答。

問題編號 2034

試確定是否存在同時滿足下列兩條件的函數 f ？

(1) f爲定義於自然數集的自然數值函數（即 $f:N\to N$）；

(2) 對任意大於 1 的自然數 n，

$f(n)=f(f(n-1))+f(f(n+1))$ 均成立。

解答：解法(一)：事實上，滿足命題的函數f並不存在。

以下是我們的證明(反證法)：

假設存在滿足命題的函數f，

由良序原理（即最小數原理）知任何自然數所成的非空集合中必有最小元素，

所以 f 的值域 $\{f(n)\in N|\ \ n$ 是大於 1 的自然數$\}=\{f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots\}$

中必有最小元素，可設其爲 $f(n_0)$，$n_0>1$，$n_0\in N$

所以對所有大於 1 的自然數 n， $f(n)\geq f(n_0)$

$\because f(n_0+1)\geq f(n_0)=f(f(n_0-1)+f(f(n_0+1))\geq 1+1>1$

$\therefore f(f(n_0+1))\geq f(f(n_0))$

但 $f(n_0)=f(f(n_0-1)+f(f(n_0+1))\geq 1+f(n_0)$ 產生矛盾結果，

所以原假設錯誤，即不存在滿足命題的函數f。

解法(二)：（採自建中陳明揚之解法。）

設存在滿足命題的函數f，由良序原理：

令 $f(n_0)=\min\{f(x)|\ \ x\geq 2,x\in N\}$，$n_0\geq 2$

$\because f(n_0)=f(f(n_0-1))+f(f(n_0+1))$ ……………………………………………………(1)

$\therefore f(n_0)>f(f(n_0+1))$，但由 $f(n_0)$ 之最小性知

$f(n_0+1)=1$，但 $n_0+1>n_0\geq 2$

$\therefore f(n_0) \le f(n_0+1) = 1$

但由(1)知 $f(f(n_0-1))$ 和 $f(f(n_0+1))$ 中必有一者為 0，

所以與命題矛盾，故知不存在滿足命題之 f。

《解題重點》

1.利用反證法證明函數 f 不存在。

2.良序原理（最小數原理）。

3. $f(n_0+1) \ge f(n_0) > 1$，$f(f(n_0+1)) \ge f(f(n_0))$。

《評析》

1.本題配合函數方程之代數題材設計，為較新穎的題型，不易切入，參與徵答者僅有建中李國禎等 24 人（含中山國中柏盛峰一人），得分率 0.84，尚稱理想。

2.解題方法大多從良序原理找到反證矛盾的理由，探討堪稱嚴謹，是進步的好現象。

3.中山國中柏盛峰能完成本題並得滿分，誠屬難能可貴，值得培養。

問題編號 2035

n 個人圍成一圈玩遊戲，$n \ge 4$，首先他們依反時針方向依序編號為 1 號，2 號，...，n 號，且讓每個人手上都拿有一枚銅板。

遊戲規則如下：遊戲開始，1 號拿一枚銅板給 2 號，然後 2 號拿二枚銅板給 3 號，接著 3 號拿一枚銅板給 4 號，4 號拿二枚銅板給下一位，規定遊戲過程中，手上沒有銅板的人他就自動出局，離開此遊戲圈而遊戲繼續下去，如此依次拿一枚、拿二枚給下一位手上仍有銅板者。試證有無限多個 n 使這個遊戲最後僅剩一人，而其餘的人均出局。

解答：為方便敘述，我們對能使遊戲最後僅剩一人，而其餘的人均出局者，稱之為「成功」，否則便稱為「失敗」，接著我們先測試幾個 n 值，希望能從中獲取到這遊戲進行的規律或遊戲成功之 n 值條件。

(一)當 n=4,5,6 時，遊戲成功；但 n=7,8 時，遊戲失敗，而 n=9,10 時，遊戲又成功了！由此我們可知並非所有 $n \ge 4$ 之自然數均可滿足命題。

(二)若 n 為偶數，在經過多次 n 值測試後，我們將發現：

(a)遊戲有機會成功之輪次圖依次出現如下：（規定：把銅板從 1 號依遊戲規則傳到 n 號時，這一過程叫“第 1 輪”；把第 k 輪淘汰後剩餘者再將銅板由頭傳至尾之過程叫第(k+1)輪，$k \ge 1$。）

$$\overbrace{1,1,\ldots,1}^{n\text{個}} \Rightarrow \overbrace{2,2,\ldots,2}^{\frac{n-2}{2}\text{個}},\underline{\underline{2}} \Rightarrow \overbrace{4,4,\ldots,4}^{\frac{n-2}{4}\text{個}},\underline{\underline{2}} \Rightarrow \overbrace{8,8,\ldots,8}^{\frac{n-2}{8}\text{個}},\underline{\underline{2}} \Rightarrow \overbrace{2^4,2^4,\ldots,2^4}^{\frac{n-2}{16}\text{個}},\underline{\underline{2}} \Rightarrow \cdots\cdots$$

注意：
- (1)圖形本應畫成圓圈表示，現以直列方式表示。
- (2)上面簡圖中任兩連續圖其實是經過若干輪次而得。
- (3)以 $\underline{\underline{2}}$ 表最後一位擁有 2 枚銅板，他將傳這 2 枚給繼續遊戲最靠近他的人而淘汰出局。

(b) $\frac{n-2}{2}$，$\frac{n-2}{4}$，$\frac{n-2}{8}$，$\frac{n-2}{16}$，.... 中任一數均不能為奇數，否則遊戲只是(a)中簡圖中任兩連續圖交替出現，而無法使遊戲成功！

(三)(1) $\because \frac{n-2}{4}=\frac{1}{2}\left[\frac{n-2}{2}\right]$，$\frac{n-2}{8}=\frac{1}{2^2}\left[\frac{n-2}{2}\right]$，$\frac{n-2}{16}=\frac{1}{2^3}\left[\frac{n-2}{2}\right]$，…… 均是正整數

所以猜測當 $\frac{n-2}{2}=2^m$，$m=0,1,2,.$.，即 $n=2^t+2$，$t\in N$ 時，遊戲能成功。

(2)因遊戲會成功之輪次圖出現情形必形如下圖：

$$\overbrace{1,1,\ldots,1}^{(2^t+2)\text{個}} \overset{C_0^t}{\Rightarrow} \overbrace{2,2,\ldots,2}^{2^{t-1}\text{個}},\underline{\underline{2}} \overset{C_1^t}{\Rightarrow} \overbrace{4,4,\ldots,4}^{2^{t-2}\text{個}},\underline{\underline{2}} \overset{C_2^t}{\Rightarrow} \cdots \overset{C_{r-1}^t}{\Rightarrow} \overbrace{2^r,2^r,\ldots,2^r}^{2^{t-r}\text{個}},\underline{\underline{2}} \overset{C_r^t}{\Rightarrow} \overbrace{2^{r+1},2^{r+1},\ldots,2^{r+1}}^{2^{t-r-1}\text{個}},\underline{\underline{2}}$$

$$\overset{C_{r+1}^t}{\Rightarrow} \cdots\cdots \Rightarrow \overbrace{\frac{n-2}{2},\ \frac{n-2}{2}}^{2\text{個}}$$

其中，C_r^t 表連續兩圖是如下過程而得：

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{2^r,2^r,\ldots,2^r,2^r}^{2^{t-r}\text{個}},\underline{\underline{2}} \Rightarrow \overbrace{(2^r+1),(2^r-1),(2^r+1),(2^r-1),\ldots,(2^r+1),(2^r-1)+2}^{2^{t-r}\text{個}} \\ \Rightarrow \overbrace{(2^r+2),(2^r-2),(2^r+2),(2^r-2),\ldots,(2^r+2),(2^r-2)+2}^{2^{t-r}\text{個}} \\ \Rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Rightarrow \overbrace{2^{r+1},2^{r+1},\ldots,2^{r+1}}^{2^{t-r-1}\text{個}},\underline{\underline{2}} \\ \quad (\text{令 } \overbrace{1,1,\ldots,1}^{(2^r+2)\text{個}} \overset{C_0^t}{\Rightarrow} \overbrace{2,2,\ldots,2}^{2^{t-1}\text{個}},\underline{\underline{2}}) \end{array}\right\}(C_r^t)\text{ 所}$$

以猜測遊戲成功之輪次進行依序為 $C_0^t \Rightarrow C_1^t \Rightarrow C_2^t \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_r^t \Rightarrow \cdots$

$\Rightarrow$ 僅剩 1 人。

我們以數學歸納法來證明上述兩猜測是正確的，以下是證明：

(i)當 t=1 時，n=4，顯然遊戲成功。

(ii)假設 $t=k\geq 4$，即 $n=2^k+2$ 時遊戲成功且依 $C_0^k \Rightarrow C_1^k \Rightarrow \cdots \Rightarrow$ 僅剩 1 人進行

因為 $\overbrace{1,1,\cdots,1}^{(2^{k+1}+2)\text{個}} \Rightarrow \overbrace{2,2,\cdots,2,}^{2^k\text{個}}\underline{\underline{2}}$ 而 $\overbrace{2,2,\cdots,2}^{2^k\text{個}}$ 即為 $\overbrace{2,2,\cdots,2}^{2^{k-1}\text{個}}\overbrace{2,2,\cdots,2}^{2^{k-1}\text{個}}$

連續由假設，$\overbrace{2,2,\cdots,2,}^{2^k\text{個}}\underline{\underline{2}} \Rightarrow \overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\2}}{2},2,\cdots,2}^{2^{k-1}\text{個}}\overbrace{2,2,\cdots,2}^{2^{k-1}\text{個}}$，其中"$\overset{\uparrow}{2}$" 表傳2枚銅板動作

$$\Rightarrow \overbrace{3,1,3,1,\cdots,3,1+2,}^{2^{k-1}\text{個}}\overbrace{2,2,\cdots,2}^{2^{k-1}\text{個}}$$

$$\Rightarrow \overbrace{3,1,3,1,\cdots,3,1,}^{2^{k-1}\text{個}}\overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\2}}{2},2,\cdots,2}^{2^{k-1}\text{個}}$$

$$\Rightarrow \overbrace{3,1,3,1,\cdots,3,1,}^{2^{k-1}\text{個}}\overbrace{3,1,3,1,\cdots,3,1+2}^{2^{k-1}\text{個}}$$

$$\Rightarrow \overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\2}}{3},1,3,1,\cdots,3,1,}^{2^{k-1}\text{個}}\overbrace{3,1,3,1,\cdots,3,1}^{2^{k-1}\text{個}}$$

$$\Rightarrow \overbrace{4,4,\cdots,4,}^{2^{k-2}\text{個}}\overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\2}}{3},1,3,1,\cdots,3,1}^{2^{k-1}\text{個}}$$

$$\Rightarrow \overbrace{4,4,\cdots,4,}^{2^{k-2}\text{個}}\overbrace{4,4,\cdots,4,}^{2^{k-2}\text{個}}\underline{\underline{2}}$$

$$\Rightarrow \overbrace{4,4,\cdots,4,}^{2^{k-1}\text{個}}\underline{\underline{2}}$$

$$\therefore C_0^{k+1} \Rightarrow C_1^{k+1}\text{成立}$$

同理，$\overbrace{4,4,\cdots,4,}^{2^{k-1}\text{個}}\underline{\underline{2}} \overset{C_2^{k+1}}{\Rightarrow} \overbrace{8,8,\cdots,8,}^{2^{k-2}\text{個}}\underline{\underline{2}}$　$\therefore C_0^{k+1} \Rightarrow C_1^{k+1} \Rightarrow C_2^{k+1}$

$\overbrace{8,8,\cdots,8,}^{2^{k-2}\text{個}}\underline{\underline{2}} \Rightarrow \overbrace{2^4,2^4,\cdots,2^4,}^{2^{k-3}\text{個}}\underline{\underline{2}}$　$\therefore C_0^{k+1} \Rightarrow C_1^{k+1} \Rightarrow C_2^{k+1} \Rightarrow C_3^{k+1}$

最後我們可得 $C_0^{k+1} \Rightarrow C_1^{k+1} \Rightarrow C_2^{k+1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow$ 僅剩 1 人，且遊戲成功。

這說明了當 $n=2^{k+1}+2$ 時 $(t=k+1)$，猜測亦成立，k=1,2,3,....

(四)因使遊戲成功之 n 為 $n=2^t+2$，$t\in N$，這說明了滿足命題的 n 值的確是無窮多的！

《解題重點》

1.先測試幾個 n 值，得知並非所有 n 值均能滿足命題，且進而可猜測出 n 是偶數時，必形如 $n=2^t+2$，$t\in N$

2.事實上，當 n 是奇數時，能滿足命題之 n 必形如 $n=2^t+1$，$t=2,3,4,\cdots$

《評析》

1. 本題屬組合數學之題型，兼具構造法解題，難度特高，但仍有港明高中謝易達

等 26 位參與徵答（含中山國中柏盛峰、鳳山國中朱浩瑋二人）得分率 0.62，仍在意料之中，顯示與高中數學教材較生疏的組合數學題材仍待訓練。

2. 此題參與徵答者幾乎均能找 $n=2^t+2$ ， $t\in N$ 或 $n=2^t+1$，$t=2,3,\cdots$ 的關係，可惜表達未臻完善，以致得分略低。

評註：

1.本次徵答統計簡表如下：

	問題編號	2031	2023	2033	2034	2035
總人數　47 人	得分	243	274	168	137	102
	徵答人數	36	40	25	23	24
	得分率	0.96	0.98	0.96	0.85	0.61
一年級　23 人	得分	106	134	63	58	27
	徵答人數	16	20	9	9	8
	得分率	0.95	0.96	1.00	0.92	0.48
二年級　17 人	得分	95	98	77	62	53
	徵答人數	14	14	12	11	12
	得分率	0.97	1.00	0.92	0.81	0.63
三年級　6 人	得分	42	42	28	17	22
	徵答人數	6	6	4	3	4
	得分率	1.00	1.00	1.00	0.81	0.79
參與徵答總校數：22 所 計：　計畫內：10 所，非計畫內：12 所						

2.本期難度略高於上一期（編號 2026~2030），且高一徵答者略多於高二，值得嘉許。

3.本次徵答同學（2035 除外）讓閱卷者覺得好像改到數學系的大學生所寫的解答一般，是很道地的數學，不像以往表達的辭不達意，經過這二年的訓練，學生們就像受過嚴格數學洗禮般的健壯起來了，值得欣慰。

4.本期徵答成績較優異學生計有：建中王維邦、李國禎、陳奕瑋；北一女曾于容；台師大附中王世豪；宜蘭高中游家瑋；武陵高中王嘉慶、余謝銘、游志強；台中一中林宗茂、蔡政育；雄中林家平、林耕賢、廖健溢；金門高中翁克全及鳳和中學簡毓延等 16

人。

5.本期解題精神特佳者應爲雄中黎冠成及中山國中柏盛峰等二人。

6.學生心得感言摘錄如下：

①編號 2032 題我用了兩種方法來證明。雖然這兩種是看似完全不同的證法，但令人驚訝的是，兩種方法的證明步驟竟一模一樣。仔細探究後才發現這兩種不同的敘述，描述的竟然是相同的內容。幾何概念的多樣性真是深深令人著迷。（中山國中，柏盛峰。）

②在圖書館中，偶然看到這本科教月刊，同時也發現書末有趣的數學挑戰徵答題，之後，我就試著解解看，雖然花了一點時間，但仍使我獲益不少。（建台中學，楊思浩。）

③♦編號 2031 題正確選取坐標系及利用垂直兩線斜率乘積必爲-1 是解題重點。

♦編號 2032 題爲簡易幾何證明，本人做了二種證明，各有其趣。

♦若改解 $(\frac{n-k}{2})^2 = k+2$ 會很 exciting！解題關鍵：善用 $kn = lm$ 之條件！！以上三題很簡單，純粹增加解 2034、2035 的信心。（雄中，蔡孟根。）

④其實這次我一再猶豫要不要寫徵答題，因爲我快要被留級了，不過還是寫了。我喜歡無拘無束的思考，不希望自己的思考習慣受到外界任何干擾，所以只要是上物理、數學課我都不愛聽課，我喜歡一個人去摸索，在學習數學的過程中正常來說，老師都會一題一題講解，可是我卻喜歡一題一題的想，如此我才能感受數學是怎麼一回事，考試你要把題型記得很熟才能得高分，所以我的成績一直不好，因爲我是這樣唸書，所以浪費了許多時間，其他科也荒廢了。長期以來，我一直在掙扎該如何是好，我這個人很奇怪，不照自己的心意去做，我會過得非常痛苦，照自己的方式，雖然成績一直不好，但過得很快樂，但會有點不安，也因爲是在「要」與「不要」之間徘徊，好幾次徵答都缺席了，這次徵答，2031，2034 再多給我一些時間，我有把握可以想出的。可是「壓力」讓我受不了了，這次雖然很早收到科教月刊，但我也是前一個禮拜才想，而且「壓力」使我的思考受到了限制。幾次的徵答活動，我漸漸掌握了思考上的盲點，我想我進步的空間還是非常大。2035 好像太簡單了，我看完題目不到十分鐘就想出來了，那種立刻得到靈感的感覺好好。（道明中學，張芳銘。）

（評注：思考數學問題是會著迷，但仍應善於安排時間，平衡其他科目的學習才對。）

⑤♦因為身旁的雜務太多，所以心情亂糟糟的，僅能寫完三題。另一方面因為高一、高二太混，加上我個人認為高一的數學老師教的不好，沒有在高一銜接上國中數學，而高一的數學老師又成天出作業，連國中數學都生疏了，基礎太差，寫來頗吃力。雖然我很想參加 IMO 競試（國際的），但恐怕和其他人相較下，再加上現在時間想參加也似乎晚了一步，我實在非常沮喪，就要畢業了，可能一輩子再沒機會參加高中部的 IMO 競試。

♦我覺得這次我寫出的幾題都有點僥倖的意味，而 2031 題、2032 題方法似乎也不太好，既不像古典幾何，也非解析幾何，但如此使用代數的方法倒也新鮮、有創意，帶點解析幾何的內涵。

♦這一次的 2035 題雖不難，而且還有更多種變化，但要如何表達卻是一大難題，我以為能簡短有力而清析的證明問題，是幫助了解問題的一種能力，可惜我不太在行。（桃園高中，黃義清。）

⑥此次徵答覺得第 2033 題若要求附上等號成立時機將較好，而第 2035 題應有其他組的無窮個 n，拭目以待，希望有不同的解法。（雄中，林家平。）

⑦編號第 2035 題中，原始的觀察歸納得到真實的答案，不過定有更好的方法，望不吝指教。（雄中，吳建成。）

⑧編號 2035 題只要證「無限多個 n」滿足，但我覺得「有無限多個 n」「不」滿足也可證，只是不知是否有兩種或以上的不互相包含而形式固定的數 n 滿足題設，就比較難了。（建中，李國禎。）

國際化學奧林匹亞競賽代表隊出爐

編輯室

中華民國參加第 30 屆墨爾本國際化學奧林匹亞代表隊選手，經選訓營三週的集訓後，於五月九日選出正取國家代表隊選手四位，備取兩位；將於七月四日至十四日，參加在澳大利亞墨爾本大學舉行之國際化學競賽。錄取的名單如下：

正取：建國中學高三：陳建宇、陳勁吉
台南一中高三：李逸祺
建國中學高二：劉偉光

備取：高雄中學高三：陳毓仁
建國中學高二：陳為政