一九九八年亞太數學奧林匹亞競賽試題

1998 年 3 月 9 日

中華民國數學奧林匹亞委員會提供

注意事項：

(1)本試卷共五題，每題滿分七分。

(2)考試時間：4 小時(9:30-13:30)。

(3)計算紙必須連同試卷繳回。

(4)不可使用計算器。

〔問題一〕設 n 爲正整數，F 表示所有的有序 n 元族 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，其中每一個 A_i 都是 $\{1,2,\cdots,1998\}$ 的子集合，$i=1,2,\cdots,n$，且設 $|A|$ 表示集合 A 的元素個數。試求出下列級數和：

$$\sum_{(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| 。$$

〔問題二〕證明：對於任意正整數 a 與 b，$(36a+b)(a+36b)$不可能是 2 的整數次方。

〔問題三〕設 a, b, c 爲正實數。證明：

$$(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}) 。$$

〔問題四〕三角形 ABC 中，直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 垂直於點 D。設 E, D, F 爲共線的三相異點，且 $\overleftrightarrow{AE}$ 與 $\overleftrightarrow{BE}$ 垂直，$\overleftrightarrow{AF}$ 與 $\overleftrightarrow{CF}$ 垂直。令線段 $\overline{BC}$ 的中點爲 M，線段 $\overline{EF}$ 的中點爲 N。證明：$\overleftrightarrow{AN}$ 與 $\overleftrightarrow{NM}$ 垂直。

〔問題五〕試確定滿足下列性質的最大整數 n：

n 可以被所有小於 $\sqrt[3]{n}$ 的正整數整除。