八十七學年度學科能力測驗數學科試題評析

黃淑琴
大學入學考試中心　研究發展處

今年的學科能力測驗已於二月十三日與十四日兩天舉行，據報載各考科的試題均頗獲好評，尤其是數學科，很多人認爲其命題靈活，試題敘述方式極爲生活化。這是繼八十六學年度大學聯考數學科之後再一次受到肯定，希望大學入學考試數學科的命題趨勢，能爲大家所接受，且讓考生更具信心。

這一份試卷共有 20 題，其中單一選擇題有 4 題，多重選擇題有 6 題，填充題有 10 題，每一題的分數均爲 5 分。今年的全均標爲 4 級分，比去年的 3 級分略有進步。這一次的數學科試題能夠再一次獲得肯定，究其原因很可能是由於其具備了下列幾個特色。

一、各測驗目標極為平均

根據大學入學考試中心的研究結果，學生的數學認知過程可分爲(1)概念性(2)程序性(3)解題能力，三種層面（林光賢等，1993），並可將這三種認知層次訂爲數學考科的測驗目標。

若仔細分析今年的試題（見表一），可發現其中概念性試題佔 6 題，程序性試題也有 6 題，解題能力試題則有 8 題，各層面的配分比例可說相當平均。這也讓日後要參加學科能力測驗的考生注意到一點，學科能力測驗數學科的試題不僅要評量學生對於數學技巧的純熟度以及推理應用的能力，更重要的是要求學生需具備足夠而且正確的數學概念。

表一：八十七學年度學科能力測驗數學科試題雙項細目表

教材內容與冊章 / 題號 / 測驗目標	數	函數與方程式	幾何	排列組合與機率統計	題數
	一(1),(2)	一(3),(4),(5) 二(1) 三(2)	二(2),(3),(4) 三(1),(4)	四(1),(2),(3)	
概念性		1,7,9	4,8	3	6
程序性	2,5 B,F	6		J	6
解題能力		10 C,H	E,G,I	A,D	8
題數	4	7	5	4	

二、試題多出自教材的第一、二冊，內容較偏重函數、方程式與幾何

若將試題依冊章歸類(表二)，第一冊佔 7 題，第二冊佔 6 題，第三冊佔 3 題，第四冊佔 4 題。另一方面，由表一可看出試題內容稍微偏重函數、方程式與幾何。

由於高一的教材著重於數系的建立，函數的了解以及平面幾何的應用，其中有一部分是國中教材的延伸，此時只要學生能穩紮根基，對於今年出自於第一、二冊的考題，自有似曾相識之感。此外，幾何方面的試題大多是學生較熟悉的平面幾何，即使讓多數學生感到棘手的空間幾何也只有兩題（第 8 題與第 D 題），且其題型新穎，難度也不算太高，事實上第 D 題困難的地方在於計數而非空間幾何，所以這也是很多人感覺今年的試題簡單且活潑的原因之一。

表二：八十七學年度學科能力測驗數學試題各冊題數分佈

冊	題號	題數
一	2,5,6,9,B,F,H	7
二	1,4,7,10,E,G	6
三	8,C,I	3
四	3,A,D,J	4

三、概念性試題包羅萬象，填充題風格獨特

除了「數」這個單元之外，五個概念性試題便涵蓋了其餘的三個單元。另外，填充題第 D、E、J 題也受到各界的喜愛，尤其是第 J 題，相信不少考生已忘記這個與物價指數與股價指數息息相關的拉氏指數。所幸試卷附有公式（這是學科能力測驗的特色之一），應該可以喚起不少考生的記憶。由於篇幅有限，這個部分僅列舉選擇題第 3、4、9 題，以及填充題第 D、E 題，並說明如下：

【選擇題第 3 題】

設事件A發生的機率為 $\frac{1}{2}$ ，事件B發生的機率為 $\frac{1}{3}$ 。若以 p 表事件A或事件B發生的機率，則 p 值的範圍為何？

(1) $p \le \frac{1}{6}$　(2) $\frac{1}{6} < p \le \frac{1}{3}$　(3) $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{2} \le p \le \frac{5}{6}$　(5) $p > \frac{5}{6}$

說明：這一題乍看之下，似乎是個計算題，其實這是一個有關機率的概念性問題。

不妨試著以圖形來表示事件 A 與事件 B 的關係，則有下列三種情形：

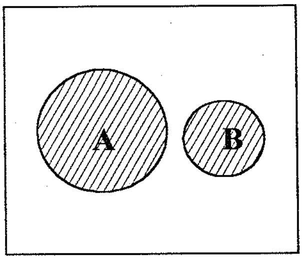


圖 1 ：$A \cap B = \varnothing$

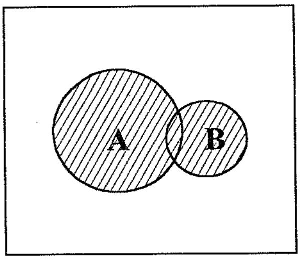


圖 2 ：$A \cap B \neq \varnothing$
$B \not\subset A$

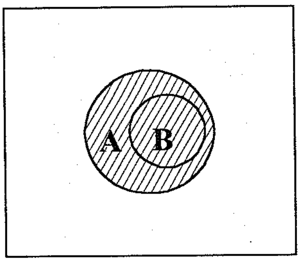


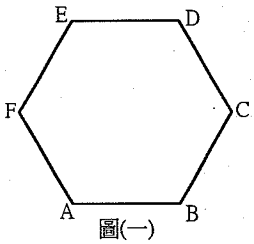
圖 3 ：$B \subset A$

所以事件 A 或事件 B 發生的最大機率爲$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$（圖 1），最小爲$\frac{1}{2}$（圖 3）。

【選擇題第 4 題】

如圖（一），ABCDEF 為一正六邊形。那麼下列向量內積中，何者最大？

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$
(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$
(5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$



圖(一)

說明：本題主旨是向量的正射影。設兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角介於0°與180°，其中 $\vec{a}$ 爲單位向量。如果 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角爲銳角，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 爲 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上之正射影的長；如果其夾角爲鈍角，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-$（$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 之正射影的長）。不妨將題目中正六邊形的邊長設爲 1，考慮向量內積與正射影之關係，我們知道 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 之值最大。

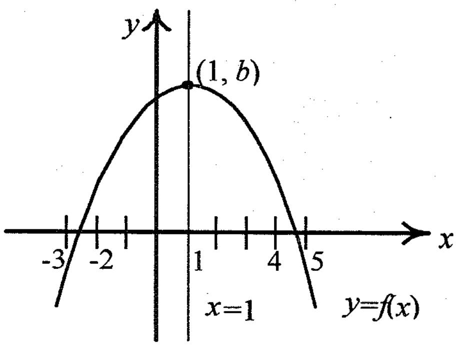
【選擇題第 9 題】

設 a 與 b 均為實數，且二次函數 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 滿足 $f(4)>0$，$f(5)<0$。試問下列何者為真？

(1) $f(0)>0$　(2) $f(-1)>0$　(3) $f(-2)>0$　(4) $f(-3)>0$　(5) $f(-4)>0$

說明：我們可從兩個角度來思考這個問題，其一是不等式的運算，其二則是二次函數圖形（事實上是拋物線）的對稱性。首先由 $f(4)>0$，$f(5)<0$，可得 $a<0$ 且 $-9a<b<-16a$。然後，再利用這兩個不等式來判斷選項的正確性，如：因爲 $f(0)=a+b>-8a>0$，故選項(1)是正確的。

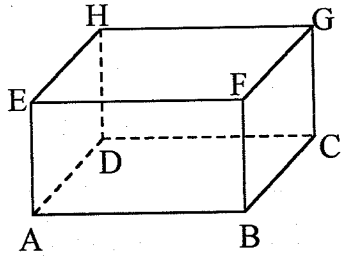
若以另一個角度來思考時，它純粹是個概念性的問題。我們知道 $f(x)=a(x-1)^2+b$ 是一條頂點爲（1 , b）且對稱於直線 $x=1$ 的拋物線。由於 $a<0$，故圖形開口朝下（如下圖）。注意，與（4,0）、（5,0）對稱於直線 $x=1$ 的點分別爲（-2,0）、（-3,0）。由圖形對稱性質，我們知道，如果 $-2\le x\le 4$，則 $f(x)>0$；如果 $x\ge 5$ 或 $x\le -3$，則 $f(x)<0$。因此，選項 (1),(2),(3) 是正確的。



【填充題第 D 題】

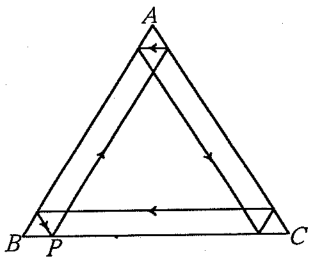
長方體中，互為歪斜線的稜線共有 ⑰⑱ 對。

說明： 這是一個利用歪斜線的概念來測試學生計數能力的試題。我們知道長方體的任一稜線（如右圖中的 $\overline{AB}$ ）分別與其餘四條稜線(如右圖中的 $\overline{DH}$, $\overline{EH}$, $\overline{CG}$ 與 $\overline{FG}$)互為歪斜線。因為長方體有12條稜線，故可得到 $12\times4=48$ 對歪斜線。但是每對歪斜線重複了兩次，故總共有24 對歪斜線。



【填充題第 E 題】

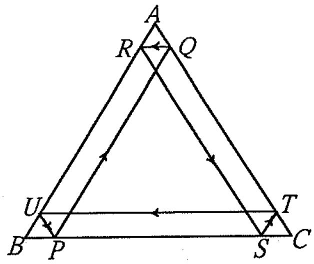
在圖（三）中，ABC 是邊長為 8 的正三角形撞球檯，線段 $BP=\sqrt{2}$ 。今由 P 點將一粒球以平行 BA 方向射出，最後又回到 P點。球所走的路徑，如圖箭號所示。則此路徑的長度為＿⑲⑳＿。



圖(三)

說明： 只要能注意到這一粒球所經過的每一段直線路徑（如下圖中的 $\overline{PQ}$ ）與 ΔABC 的某一邊平行，這個題目是可以不經由計算而得到答案。譬如說要証明 $\overline{QR}//\overline{BC}$。由於 $\angle AQR=\angle CQP$（入射角等於反射角）與 $\overline{PQ}//\overline{AB}$，故 $\angle AQR=60°=\angle ACB$ 。因此，$\overline{QR}//\overline{BC}$。其餘的情形亦同。所以此路徑的長度為

$$\begin{aligned}&\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{ST}+\overline{TU}+\overline{UP}\\=&\overline{AU}+\overline{SC}+\overline{AT}+\overline{UB}+\overline{BS}+\overline{TC}\\=&\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}\\=&24\end{aligned}$$

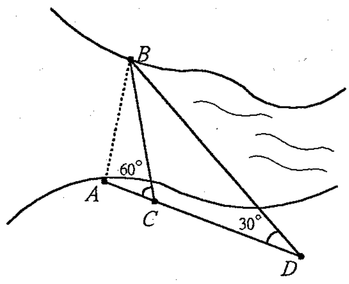


四、試題難度大多屬於中等偏易與簡易

若將試題難度分成四等：簡易、中等偏易、中等偏難、難，則今年的試題可說大多是簡易與中等偏易的試題。筆者主觀認爲稍難的試題有三題：塡充題第 G、H、I 題，以下分別詳細說明。

【填充題第 G 題】

如圖（四），A、B 兩點分別位於一河口的兩岸邊。某人在通往 A 點的筆直公路上，距離 A 點 50公尺的 C 點與距離 A 點200 公尺的D 點，分別測得 $\angle ACB=60°, \angle ADB=30°$，則 A 與 B 的距離為 ＿㉔㉕$\sqrt{㉖}$＿ 公尺。



圖(四)

說明： 這是一個關於三角測量的問題，基本工具是餘弦定理。爲了要求出$\overline{AB}$的長度，先看看我們現有的資料，已知ΔABC中，$\angle ACB=60°$，且$\overline{AC}=50$公尺。因此，欲應用餘弦定理於ΔABC，須先找出$\overline{BC}$的長度。另一方面，因爲$\angle CBD=\angle ACB-\angle CDB=60°-30°=30°$，所以 ΔBCD是一個等腰三角形，因此$\overline{BC}=\overline{CD}=150$公尺。故得

$$\overline{AB}=\sqrt{50^2+150^2-2\cdot 50\cdot 150\cdot \cos 60°}=50\sqrt{7}$$

【填充題第 H 題】

設 $f(x)$ 為一多項式。若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $5x+3$ 則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 ＿㉗$x+$㉘＿

說明： 「多項式除法定理」一直是令學生感到較模糊的性質，其原因不外是畏懼符號的操作。因此，這一題可說是本試卷較難的一題。

根據多項式除法定理，得知恰有二個多項式 $q(x)$（商式）及 $ax+b$ （餘

式），其中 a,b 是實數，滿足

$$f(x)=q(x)\left(x^2+x+1\right)+(ax+b)$$

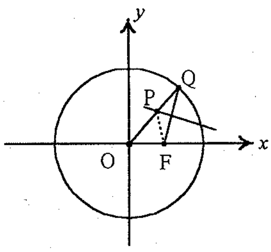
因此

$$(x+1)f(x)=\left[(x+1)q(x)+a\right]\left(x^2+x+1\right)+\left[bx+(b-a)\right]$$

因爲 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式爲 $5x+3$，故 $b=5$，$a=2$。

【填充題第 I 題】

在圖（五）中，圓 O 的半徑為6，F 的坐標為 $(4,0)$，Q 在圓 O 上，P 為 $\overline{FQ}$ 的中垂線與 $\overline{OQ}$ 的交點。當 Q 在圓 O 上移動時，動點 P 的軌跡方程式為 $\underline{\dfrac{(x-㉙)^2}{㉛}+\dfrac{(y-㉚)^2}{㉜}=1}$



圖（五）

說明： 這是一個很有特色的圓錐曲線問題，學生可從答案的格式猜測動點 P 的軌跡是一個橢圓。事實上，我們也可以由中垂線的性質得知 $\overline{PF}=\overline{PQ}$，因此 $\overline{OP}+\overline{PF}=\overline{OP}+\overline{PQ}=6$，換句話說，這個問題是要找出「動點至二定點 O 與 F 之距離和為 6 的軌跡方程式」。注意 $\overline{OF}=4<6$，所以其軌跡爲橢圓，此橢圓之中心爲 $\overline{OF}$ 之中點，即 $(2,0)$；長軸長 $=2a=6$，即 $a=3$。若短軸長爲 $2b$，則 $b^2=a^2-c^2=5$。

故橢圓方程式爲

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-0)^2}{5}=1\text{。}$$

疑義題釋疑

本中心在公佈數學科答案之後，曾接獲幾位同學的來信，指出塡充題第 A題：在三位數中，百位數與個位數之差的絕對值為 2 的數，共 $\underline{⑪⑫⑬}$ 個，有關「位數」的定義問題，同學們認爲若同時考慮負數時，其答案應爲 300，而非150。其實，一般說來，位數是只針對零或正整數而言（同學們不妨參考第四冊第 7 頁例 8 ），所以這一題的答案仍維持150。

這一題答300的考生人數多不多呢？根據本中心資訊管理處所提供的資料，此題答

300 的考生有 262 名。若將這 262 名考生與答 150 的考生合併爲一群體的話，則這 262 名考生佔此群體的 1.4%。

給高中教師與學生的建議

八十六學年度大學聯考與八十七學年度學科能力測驗數學考科的測驗功能雖不盡相同，但是有一點是共通的，那就是這兩種測驗均重視學生的數學概念。即便如此，概念性試題的答對率卻不盡理想（黃淑琴，1997，1998）。儘管我們並不贊同考試領導教學，但是如果考試能導正教學，也未嘗不是可喜的現象。

今後，在校師生所需共同努力的，將是破除「數學即是演算」的迷思，並著重數學概念的建立與培養。惟有如此，學生才不致一味地只重視解題卻不求甚解。其實，在高中階段的數學教育，不僅要傳授學生數學知識，更重要的是要教學生學會如何應用數學的思考方式來觀察周圍的事物，以分析問題和解決問題。因此學科能力測驗的數學試題，不像大學聯考分成自然組數學與社會組數學，其用意或許在強調數學教育應回歸課程標準。今年參加學科能力測驗的考生已近六萬人，幾近聯考的一半人數。因此，學科能力測驗的試題，對高中的數學教育會有某一程度的影響。希望今後教師的教學會給學生作更正確的引導，則相信不久，高中的數學教育必呈現嶄新的氣象。

參考資料

1.林光賢、李白飛、林福來、蕭益林、林佳蓉、王安蘭，大學入學考試數學科試題分析與命題設計研究報告（三），大學入學考試中心，1993。

2.黃淑琴，八十六年大學聯考數學試題評析，科學教育月刊 203，48-57，國立台灣師範大學科學教育中心，1997。

3.黃淑琴，八十六學年度大學入學考試試題分析（數學科），大學入學考試中心，1998。

誌謝

感謝國立臺灣大學數學系楊宏章教授與臺灣師範大學化學系蕭次融教授對本篇文章所提供的建議。