中學數學挑戰徵答題參考解答評析

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號
2021

試確定所有質數 p 使得 p^2+11 恰有六個相異正因數。

解答：解法(一)：

(1)當 $p=2$ 時， $p^2+11=15$ 有 1,3,5,15 四個相異正因數。

當 $p=3$ 時， $p^2+11=20$ 有 1,2,4,5,10,20 六個相異正因數，

當 $p=5$ 時， $p^2+11=36=12\times 3$，有 9 個相異正因數且 $12\mid p^2+11$，

當 $p=7$ 時， $p^2+11=60=12\times 5$，有 12 個相異正因數且 $12\mid p^2+11$，

所以 $p=3$ 合乎所求，而 $p=2,5,7$ 均不合條件。

(2)我們猜想當 p 爲質數且 $p>3$， p^2+11 恆爲 12 的倍數且大於 12，因此 p^2+11 之相異正因數個數必超過六個。現證明如下：

因 $p\neq 2$ $\quad\therefore p^2\equiv 1\pmod 4$ $\quad\therefore 4\mid p^2+11$

又 $p\neq 3$ $\quad\therefore p^2\equiv 1\pmod 3$ $\quad\therefore 3\mid p^2+11$，

故 $12\mid p^2+11$ 且 $p^2+11>12$

所以 $p>3$， p^2+11 的相異正因數個數必超過六個，由(1)(2)知僅當 $p=3$ 時 p^2+11 恰有六個相異正因數。

解法(二)：（採自中山國中<u>柏盛峰</u>之解法。）

除了 2,3 之外，所有質數皆非 2 或 3 的倍數，所以除了 2,3 外，所有質數皆可寫成 $6n\pm 1(n\in N)$

$p=2$ 時， $p^2+11=15=3\times 5$，只有四個正因數——①

$p=3$ 時， $p^2+11=20=2^2\times 5$，恰有六個相異正因數——②

$p=6n\pm 1$，$p^2+11=36n^2\pm 12n+1+11$

$$=12(3n^2\pm n+1)=2^2\times 3\times(3n^2\pm n+1)$$

除非 $(3n^2\pm n+1)=1$ 否則(p^2+11)必有超過六個正因數，

而當 $3n^2\pm n+1=1$ 時 $n\in N$

$n=0$ 或 $\frac{1}{3}$ 皆不合——③

綜合①、②、③可知：只有 $p=3$ 時 p^2+11 才恰有六個相異正因數。

《解題重點》

1.先測試 $p=2,3,5,7$，可知 $p=3$ 合乎所求，且 $p>3$ 時 p^2+11 爲 12 的倍數。

2.若 $p\neq 2$ 時 $p^2\equiv 1 \pmod 4$ $\quad\therefore 4 \mid p^2+11$；

若 $p\neq 3$ 時 $\therefore p^2\equiv 1 \pmod 3$ $\quad\therefore 3 \mid p^2+11$，故得 $12 \mid p^2+11$。

3.證出當 $p>3$ 時無解。

《評析》

1.本題配合質數及平方數基本概念而設計，屬簡易數論題型，徵答本題者計有道明中學張芳銘等 48 人（含鳳山國中朱浩瑋及中山國中柏盛峰等 2 人）得分率 0.89，高一學生之得分率不比高二學生低，可能跟兩個年級徵答人數有關。

2.本題得分率不如預期理想，應與徵答者解題分類及書寫品質有關，在分類解題技巧及書寫答題方式應再待加強訓練。

3.由此題可看出同學對於數論中質數題型已能掌握解題方法，先由 $p=2$ 開始判斷，繼而 $p\neq 2$ 時設 $p=2k+1$ 等去解題。

4.台北市中山國中三年級學生柏盛峰同學首次參加徵答，本題書寫品質頗佳，值得嘉許。

問題編號 2022

在正方體的八個頂點分別標上 $+1$ 或 -1，然後六面中每一面再分別標上一個數，此數爲該面 4 個頂點所標的數之乘積。

試確定這 14 個數所有可能的和。

解答：設此正方體的 8 個頂點上所標之數分別是 $x_1,x_2,\ldots,x_8$，則這 14 個數的乘積爲 $x_1{}^4x_2{}^4\ldots x_8{}^4=1$，所以這 14 個數中(-1)的個數必爲偶數個。因而這 14 個數之和可能爲 14,10,6,2,(-2),(-6),(-10),(-14)。

(a)若和爲(-14)時，則 14 個數均爲(-1)，但當 8 個頂點上之數均爲(-1)時，六個面上所標之數爲 1，此爲矛盾，所以和爲(-14)不可能。

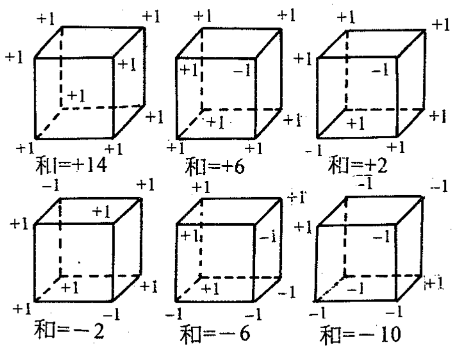
(b)若和爲 10 時，則這 14 個數中恰有 2 個爲(-1)，另外 12 個爲+1。我們考慮下面情況：

(i)如果 8 個頂點都不標(-1)，則這 14 個數中不可能有(-1)，不合。

(ii)如果 8 個頂點只有一個標了(-1)，則這 14 個數中恰有 4 個(-1)，不合。

(iii)如果 8 個頂點有二個標了(-1)，則這 14 個數中至少有 4 個(-1)，不合。

由(i),(ii),(iii)可知和亦不可能爲 10。故所有可能的和只有 14,6,2,(-2),(-6),(-10)六種標數方法如圖所示。



《解題重點》

1.14 個數中(-1)的個數必爲偶數個，所以此 14 個數之和可能爲 14,10,6,2,(-2),(-6),(-10),(-14)。

2.若 8 個頂點只有一個標上(-1)，則這 14 個數中有 4 個(-1)。

《評析》

1.本題應爲簡易組合數學題型，惟國內中學生對組合數學較生疏，解題經驗亦不足，參與徵答者計有南一中李卓諭等 41 人（含鳳山國中朱浩瑋 1 人）得分率 0.82，略低於本期其它四道題。

2.參與學生獲得滿分者，皆能先判斷出(-1)之個數爲偶數個，先找到和可能爲 14,10,6,2, (-2),(-6),(-10),(-14)，再證出(-14),10 不可能出現，亦有學生打從一開始便以畫圖來求解。

3.部分學生僅求出可能的答案，但未完整造出這些可能答案之實例遭到扣分；構造具體實例符合問題所求是必要的過程。

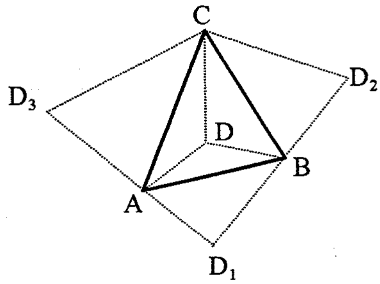
問題編號
2023

若四面體 $ABCD$ 中

$\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB=\angle ABC+\angle CBD+\angle DBA=180^\circ$ 。

試證：$\overline{CD}\geq\overline{AB}$ 。

解答：(1)將四面體 $ABCD$ 的三個稜 $\overline{AD}$，$\overline{BD}$，$\overline{CD}$ 剪開，使 ΔADB、ΔBDC、ΔCDA 能攤開與 ΔABC 共平面，而新形成的三個三角形分別以 ΔAD_1B，ΔBD_2C，ΔCD_3A（如圖所示），此時 D_1、A、D_3 共線且 D_1、B、D_2 也共線（因爲 $\angle DAC = \angle D_3AC$，$\angle DAB = \angle D_1AB$，且 $\angle CAD + \angle BAD + \angle CAB = 180^\circ$，$D_1$、$B$、$D_2$ 共線理由相同）。



(2)連接 $\overline{D_2D_3}$（可能 D_2、C、D_3 共線），則 $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{D_2D_3}$（因爲 A、B 分別爲 $\overline{D_1D_3}$、$\overline{D_1D_2}$ 的中點）。

(3) $2\overline{CD} = \overline{CD_3} + \overline{CD_2} \geq \overline{D_2D_3} = 2\overline{AB}$，所以 $\overline{CD} \geq \overline{AB}$，本命題得證。

《解題重點》

1.將四面體的三稜剪開，攤成共面的三角形。

2.三相鄰角和爲 180° 時，三 $(D_1$、A、$D_3)$ 點共線。

3.三角形兩邊中點連線段爲另一邊長的一半。

《評析》

1.本題屬簡易立體幾何題材，透過具體操作很容易找到解題線索，計有南一中陳盈達等 42 人參與徵答，得分率高達 0.95，爲本期五道題中最高。

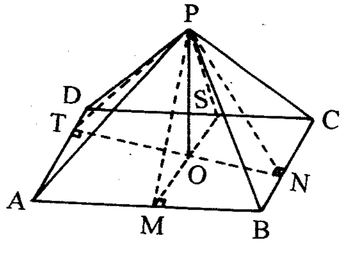
2.陳盈達不僅完成本題，意猶未盡的繼續探討，很有研究精神，值得鼓勵。

3.立體幾何的題材是國內中學數學題材較欠缺不足的部分，培養立體概念又需較長期的訓練，在資優生數學創造能力的培養上又是重要的一環，值得教學者注意。

問題編號 2024

若 P 爲平行四邊形 $ABCD$ 的平面外一點，且使四個三角形 ΔPAB、ΔPBC、ΔPCD、ΔPAD 都有相同的面積，試證 ABCD 爲菱形。

解答：設 P 點在平面 $ABCD$ 上的正射影爲 O 點，且 $\overline{PM}, \overline{PN}, \overline{PS}, \overline{PT}$ 分別是 ΔPAB、ΔPBC、ΔPCD、ΔPAD 的高，如圖。



(i)$\because ABCD$ 是平行四邊形，$\therefore \overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{BC}=\overline{AD}$

又 ΔPAB、ΔPBC、ΔPCD、ΔPAD (4 個三角形面積相等)

$\therefore \overline{PM}=\overline{PS}$，$\overline{PN}=\overline{PT}$

(ii)因爲 $\overline{PO}$ 垂直平面 $ABCD$，由三垂線定理知 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{BC}$，再由畢氏定理易得 $\overline{OM}=\overline{OS}$，$\overline{ON}=\overline{OT}$，又因 $ABCD$ 是平行四邊形，所以 T、O、N 三點共線且 S、O、M 三點共線，所以 O 點是平行四邊形 $ABCD$ 兩對角線之交點。

(iii)令 $\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{OM}=\overline{OS}=m$，$\overline{ON}=\overline{OT}=n$，$\overline{PO}=h$，

$\because ABCD$面積$=a\cdot 2m=b\cdot 2n$，$\therefore am=bn$

又 ΔPAB面積$=\Delta PBC$面積，$\therefore a\sqrt{m^2+h^2}=b\sqrt{n^2+h^2}$

$(am)^2+(ah)^2=(bn)^2+(bh)^2$，整理可得 $a=b$，即$\overline{AB}=\overline{BC}$

因 $ABCD$ 是平行四邊形且 $\overline{AB}=\overline{BC}\Rightarrow\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$，

所以四邊形 $ABCD$ 爲菱形。

《解題重點》

1.若平行四邊形的一組鄰邊相等，則此平行四邊形爲菱形。

2.等面積的三角形若底相等，則高亦相等。

3.三垂線定理。

《評析》

1.本題亦屬簡易立體幾何題，加上一些綜合平面幾何的技術，就可順利解題，計有北一女葉書蘋等 42 人參與徵答得分率 0.86，難度高於前道題。

2.雄中黎冠成同學想仿照前道題角錐攤開解題，然未能將細節交待詳細以致未能獲得滿分，相當可惜。

問題編號 2025

設 $p(x)$爲 1998 次的實係數多項式，

且 $p(1911)+p(87)<1998<p(1912)+p(86)$。

試證可找到兩實數 a、b，使得 $a+b=1998$，且 $p(a)+p(b)=1998$。

解答：令 $f(x)=p(x)+p(1998-x)-1998$，因爲 $p(x)$ 是 1998 次的實係數多項式，所以 $p(1998-x)$ 也是 1998 次的實係數多項式。

顯然 $f(x)$ 是次數至多爲 1998 次的多項式，

$\because f(87)=p(87)+p(1991)-1998<0$

$\because f(86)=p(86)+p(1912)-1998>0$

故由勘根定理知在 86 和 87 之間至少存在一實數 x_0，使得 $f(x_0)=0$，

即 $p(x_0)+p(1998-x_0)=1998$，令 $a=x_0$，$b=1998-x_0$

則 $a+b=1998$，$p(a)+p(b)=1998$ 合乎所求。

《解題重點》

1.令 $f(x)=p(x)+p(1998-x)-1998$，由已知可得 $f(86)>0$，$f(87)<0$。

2.勘根定理：設 $f(x)$ 是實係數的 n 次多項式，$f(\alpha)f(\beta)<0$ 則 $f(x)=0$ 在 α，β 之間至少有一實根。

《評析》

1.本題配合多項函數勘根定理題材設計，應爲一智慧型的題目，計有武陵高中游志強等 44 人參與徵答，得分率 0.91，在本期五道題中僅略低於第 2023 題。

2.本題當初認爲是難題，但意外的是參與本題同學都能在我們當初預設下，用勘根定理或中間值定理（有些學生注意到多項函數連續性，未能將定理名稱寫出）完整解題，可見學生自學能力相當強。

評註：

1.本次徵答統計簡表如下：

總人數　57 人	問題編號	2021	2022	2023	2024	2025
	得分	274	223	279	253	273
	徵答人數	44	39	42	42	43
	得分率	0.89	0.82	0.95	0.86	0.91
一年級　20 人	得分	90	71	82	68	84
	徵答人數	14	13	12	11	13
	得分率	0.92	0.78	0.98	0.88	0.92
二年級　27 人	得分	135	105	148	132	128
	徵答人數	23	19	23	23	21
	得分率	0.84	0.79	0.92	0.82	0.87
三年級　10 人	得分	49	47	49	53	61
	徵答人數	7	7	7	8	9
	得分率	1.00	0.96	1.00	0.95	0.97
參與徵答總校數：16 所 計：　計畫內：10 所，非計畫內：6 所						

2.本期參與徵答學生數略多於上一期，學校數則大幅增加，應與二、三月國內舉辦一連串的亞太、國際數學奧林匹亞活動有關。

3.本期徵答總成績較優異的學生計有：建中蔡旭程、陳奕瑋、李國禎；北一女葉書蘋、曾于容；台師大附中賴柏翊、林建位、王世豪、陳正傑；武陵高中王嘉慶、黃世昌、游志強；台中一中林宗茂；台南一中劉育廷、李卓諭、賴信弘；雄中黎冠成、廖英傑、林家平、盧佑群、王紹宇、廖健溢；金門高中翁克全及港明高中王俊傑等 24 人，他們都徵答五道題，題題幾乎都是滿分。

4.學生心得感言摘錄如下：

①看了近一年的挑戰題，題目也大部分都嘗試過，每每苦思完一道問題之後，稍有心得，但思考下一題時，又百思不得其解，對一般學生而言，算數學是最吃力不討好的事了，但對數學愛好者來說，解完一題的成就感比百思不得其解的苦惱來得大多了，我想，會寫挑戰題的人都是數學愛好者，在數學領域中橫衝直撞跌得鼻青臉腫依舊不改其樂，而我，也不例外。（雄中，林耕賢。）

②編號 2022 題我採取了最原始的暴力法，但我相信會有更好的方法，還請多多指教。（雄中，黎冠成。）

（評注：你的解法不算暴力，應建立自己的信心。）

③編號 2022 題中，雖然討論法是最笨的方法，卻也找了出答案，有時也是滿有效的方法。我現在也嘗試他法解答中。（雄中，吳建成。）

④編號 2023 題的訣竅一捉住，一切迎刃而解，令人感到十分暢快。（雄中，林家平。）

⑤編號 2023 題若只證明 $\overline{CD} \geq \overline{AB}$ 並不很難，但爲了等號成立的要條件著實花了不少工夫，原先以爲僅有正四面體時等號才會成立，後來親自動手折紙後才找到答案，不是否還有更好的作法？因爲這個作法好像有點麻煩。（南一中，陳盈達。）

⑥編號 2024 題之題目略有難度，但仔細尋找依然有線索可用。（雄中，葉昌旗。）

⑦編號 2025 題只要了解勘根基本定理，稍微腦筋轉一下，就出來了！（雄中，羅皓維。）

⑧這是我第一次參加挑戰題徵答，雖然以前看過，不過都敬而遠之，因爲常覺得自己才高一，學得太少，且和一些國中資優班的同學比起來，我所接受的數學訓練偏少，沒把握寫出一兩題。但現在寒假時間很多，所拿出來做練習，發現我這次每題都會，信心倍增，而且全部只花了一個半小時多就想出來，使我對我的數學前途感到光明。這次的題目中 2023 和 2024 兩題加起來我大約花 25 分鐘，2021 花了 30 分鐘，2022 花了 15 分鐘，2025 花了 20 分鐘，所以很明顯我的幾何能力遠比數論能力強，也可

以說我的數論很差，所以我希望如果我這次五題的答案各位評審覺得還算有實力的話，能寄給我一些關於數論的書單讓我參考一下。

由我的答案中不難看出我是缺乏寫這類較深入題目經驗的人，所以希望我能拿到這次其他人中寫的簡潔明了的答案，來學習他們的寫法，因爲我覺得我的證明過程有些太冗長，如 2024 其實應該不用寫的那麼複雜（詳細？），但我卻找不到更好的敘述方式，所以寫了一張 A4，我對此有點傷腦筋，因爲如果在此種難度就花了偏大的篇幅，那麼像亞太或 IMO 等我可能難逃花過半的時間在寫上面了。（不過我可能沒機會到如此高的等級，亞太還有點希望，但 IMO 就難啦。）

這一次的五題中，2025 是我自讀完第一冊第五章後，格物致知了 20 分鐘才想到，但我哥在十分中以內就寫出來了，不禁讓我有個疑問：自讀到底能不能和上課學的一樣詳細且能靈活運用，因爲我自讀的速度不慢（現在 2 月 12 號已經念到平面向量），但忘的也多，可能是一下吸收太多，但是最大的問題就是靈活運用的能力也比一般上課的人慢，能否告訴我問題出在哪？

我的目標是在高二以前念完基礎數學，高二的寒假念完理科數學，不過我在想是否有眼光太高的現象？我目前知道北一高一有一位現在就讀完基礎數學的，我學校（附中）也有一位差不多此程度的，所以我的目標對於一個想鑽研數學的人來說是高還是低還是剛好？（台師大附中，賴柏翔。）

（評注：學數學貴在建立正確學習方法與態度，須花長期時間鑽研思考，才能成功；目前就高一學生而言，您的能力應在高水準之列，繼續努力。）