中華民國參加一九九八年亞太數學奧林匹亞競賽研習營模擬競試試題參考解答及獨立研究試題

中華民國數學奧林匹亞委員會訓練組、試題組

壹、模擬競試試題

編號：________（學生自填）

注意事項：

(1)本試卷共五題，每題滿分七分。

(2)考試時間：4 小時(08:00－12:00)。

(3)計算紙必需連同試卷一起交回。

(4)不可使用計算器。

問題一：設 C_1、C_2 爲兩個外離的圓，且圓 C_1 與 C_2 的兩條外公切線相交於 S。對任何同時與圓 C_1、C_2 相外切的圓 C，令 P 爲點 S 對圓 C 作切線的切點。試證：SP 的長度爲常數（與 C 選取無關）。

問題二：設 a 爲正整數，已知 2001 整除 $a^{2001}-1$。證明：$(2001)^2$ 亦整除 $a^{2001}-1$。

問題三：假設：u,v,w 爲實數，$0<m_1,m_2,m_3<1$ 且 $m_1+m_2+m_3=1$。

證明：

$[m_1(v+w)+m_2(w+u)+m_3(u+v)]^2 \ge 4(m_1vw+m_2wu+m_3uv)$，並找出等號成立的充要條件。

問題四：設 p,q,r 爲相異的三個正質數，集合 N 表示正整數集。試確定所有的整數數列 $<a_n>$，使得

(a) $a_n>1, \forall n\ge 5;$

(b) $a_n+a_{n+1}+pqr=a_{n+2}a_{n+3}+1, \forall n\in N$。

問題五：非負整數數列 $a_1,a_2,\ldots,a_{1998}$ 可以「變動」爲另一非負整數數列 $b_1,b_2,\ldots,b_{1998}$ 是指存在某一 i 使得 "$b_i=a_i-2, b_{i+1}=a_{i+1}+1$" 或 "$b_i=a_i-2, b_{i-1}=a_{i-1}+1$"，其他項 $b_j=a_j$。一個「好的數列」是指一非負整數數列 $a_1,a_2,\ldots,a_{1998}$，滿足對每一項 a_i，均存在一連串的變動，使得這數列變動到一個第 i 項爲正整數的非負數列。試求這種好的數列之各項和 $\sum_{i=1}^{1998}a_i$ 的最小值。

貳：模擬試題參考解答

問題一參考解答

令圓 C 與圓 C_1、圓 C_2 的切點分別爲 A、B，令 D、E 分別爲直線 AB 交圓 C_1、圓 C_2 的另外交點，則 C_1C、C_2C 分別通過 A、B。考慮三角形 CC_1C_2，由於

$$\frac{C_2B}{BC}\cdot\frac{CA}{AC_1}\cdot\frac{C_1S}{SC_2}=1,$$

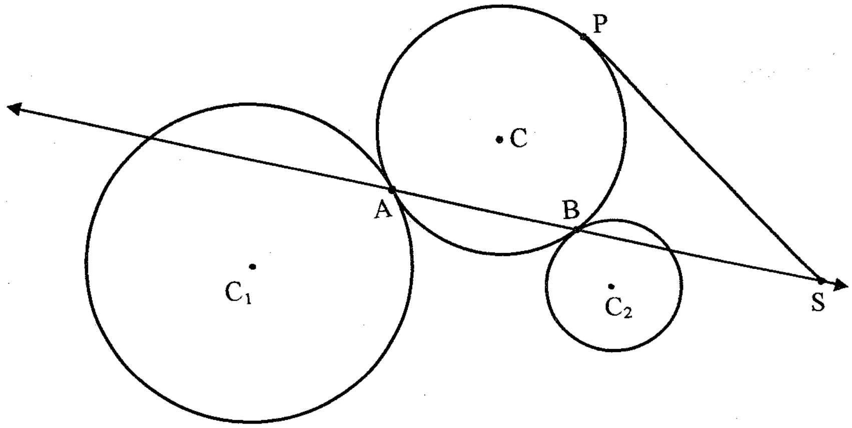
由 Menelaus 定理知：ABS 共線。因爲

$$\angle C_1DA=\angle C_1AD=\angle BAC=\angle CBA=\angle C_2BE=\angle C_2EB$$

所以 $DC_1 \| EC_2, AC_1 \| EC_2$。因此易知 $\dfrac{SD}{SB}=\dfrac{SA}{SE}$，所以 $SD\cdot SE=SA\cdot SB$。

因此 $SP^4=(SA\cdot SB)^2=SA\cdot SB\cdot SD\cdot SE=(SA\cdot SD)\cdot(SB\cdot SD)=k_1k_2$

，其中 k_1、k_2 分別爲 S 對圓 C_1、圓 C_2 的冪。所以 SP 的長度與圓 C 的選取無關。



問題二參考解答

首先證明下面引理：

設 b 爲正整數，p 爲質數。若

$$p \mid b^p-1 \text{ 則 } p^2 \mid b^p-1.$$

理由如下，因 $b^p\equiv 1 \pmod p$，知 b 與 p 互質，由 Fermat 定理，

$$b^{p-1}\equiv 1 \pmod p,$$

從而得

$$b \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

由

$$b^p - 1 = (b-1)(b^{p-1} + b^{p-2} + \cdots + b + 1),$$

得

$$p^2 \mid b^p - 1.$$

現回到本問題，因

$$2001 = 3 \times 23 \times 29$$

且

$$2001 \mid a^{2001} - 1,$$

得

$$3 \mid a^{2001} - 1.$$

由上面引理，得到

$$3^2 \mid a^{2001} - 1.$$

同理

$$23^2 \mid a^{2001} - 1,$$

$$29^2 \mid a^{2001} - 1.$$

因 3,23,29 爲相異質數，所以

$$3^2 \times 23^2 \times 29^2 \mid a^{2001} - 1,$$

故

$$(2001)^2 \mid a^{2001} - 1.$$

問題三參考解答

解 1：

我們可以不妨假設 $u \le v \le w$ ，則 $v(u+w-v) = uw + (w-v)(v-u) \ge uw$

而等號成立的充分與必要條件是 $v = w$ 或 $v = u$ 設

$$a = v = (m_1 + m_2 + m_3)v, b = m_1 w + m_2 (u + w - v) + m_3 u$$

由不等式 $(a+b)^2 \ge 4ab$ 得

$$[m_1(v+w) + m_2(w+u) + m_3(u+v)]^2 \ge 4[m_1 vw + m_2 v(u+w-v) + m_3 uv] \ge 4(m_1 vw + m_2 wu + m_3).$$

等號成立的充分與必要條件是（$v = w$ 或 $v = u$）及 $a = b$ 。所以等號成立的充分與必要條件是 $u = v = w$ 。

解 2：（賴信弘同學的解法）

令 $f(x)=x^2-[m_1(v+w)+m_2(w+u)+m_3(u+v)]x+(m_1vw+m_2wu+m_3uv)$

利用 $m_1+m_2+m_3=1$ 代入化簡可得

$f(u)=m_1(u-v)(u-w)$

$f(v)=m_2(v-u)(v-w)$

$f(w)=m_3(w-u)(w-v)$

不妨設 $u\ge v\ge w$ ，則

$f(u)\ge 0,\quad f(v)\le 0,\quad f(w)\ge 0$

由中間值定理知，$f(x)=0$ 必至少有一實根。

因此判別式

$$\Delta=m_1(v+w)+m_2(w+u)+m_3(u+v)-4(m_1vw+m_2wu+m_3uv)\ge 0$$

從上面，可看出

$$\Delta=0\Leftrightarrow f(x)\text{有重根}\Leftrightarrow u=v=w.$$

問題四參考解答

由條件 2 得

$$a_n+a_{n+1}=a_{n+2}a_{n+3}+1-pqr. \tag{1.1}$$

將(1.1)式中的 n 以 $n+1$ 代換可得

$$a_{n+1}+a_{n+2}=a_{n+3}a_{n+4}+1-pqr. \tag{1.2}$$

將(1.1)(1.2)兩式相減可得

$$a_n-a_{n+2}=a_{n+3}(a_{n+2}-a_{n+4}),\ \forall n. \tag{$*$}$$

若 $a_2\ne a_4$ ，則由($*$)可得

$$\infty>|a_2-a_4|>|a_4-a_6|>\cdots>|a_{n+2}-a_{n+4}|>\cdots,\ \forall n.$$

矛盾！故 $a_2=a_4$。同理可知 $a_2=a_4=a_6=\cdots,a_3=a_5=a_7=\cdots$。再以 $n=2$ 代入(1.1)式得

$$a_2+a_3=a_4a_5+1-pqr=a_2a_3+1-pqr,$$

即

$$(a_2-1)(a_3-1)=pqr.$$

令 $a_2=1+k$ ，其中 k 爲 pqr 的因數，即 $k=1,p,q,r,pq,pr,qr,pqr$ ，則 $a_3=1+\dfrac{pqr}{k}$ 。以 $n=1$ 代入(1.1)式得

$$a_1+a_2=a_3a_4+1-pqr=a_3a_2+1-pqr.$$

可解得 $a_1=1+\dfrac{pqr}{k}$ 。故可能的數列爲 $a_{2n}=1+k,a_{2n-1}=1+\dfrac{pqr}{k}$ ，共 8 個，其中

$k=1,p,q,r,pq,pr,qr,pqr$。代回驗證，這八個數列確實也滿足題目要求。

問題五參考解答

我們將證明如果數列的長度改爲 n 時，答案是 $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$。

首先考慮一數列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{1998})$，其中 $j\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ 時 $a_j=2$，當其餘的 $a_j=0$。對於任一爲 0 的項，其旁邊都有一項是 2，所以經過一次變動，就可以將這一項變爲 1，因此最佳解的各項各不超過 $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$。

其次我們要用歸納法證明最佳解 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的各項和最少要是 $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$。當 $n=1,2,3$ 時顯然成立，現在考慮 $n\geq 4$ 的情況。我們可以假設 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是一個好的數列中各項和最小且字典排序最大的。

首先證明，對各項 a_i 均有 $0\leq a_i\leq 2$。假設不對，存在某項 $a_m\geq 3$，則可以考慮另一分布 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，其中 $b_m=a_m-2, b_{m-1}=a_{m-1}+1$（$m=1$ 時不考慮此項），$b_{m+1}=a_{m+1}+1$（$m=n$ 時不考慮此項），其他 $b_j=a_j$。可以看出 b 也是一個好的數列。其各項和不比 a 的各項和多，也因此要一樣多，此時一定是 $2\leq m\leq n-1$。但 b 字典排序大於 a，所以不可能，也就是說 $0\leq a_i\leq 2$ 對所有的 i 均成立。

其次證明 $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n\leq 2$，否則當 $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n\geq 3$ 時，考慮

$$(a_1,a_2,\cdots,a_{n-4},a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n-2}-2,0,2,0),$$

這也是一好的數列，其各項和與 a 一樣，但字典排序比 a 大，這證明了 $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n\leq 2$。

因爲所有 $a_i\leq 2$，所以任一變動，最多只能往右邊的項增加 1，所以 (a_{n-2},a_{n-1},a_n) 只可能是 $(0,2,0),(0,0,2),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$。任一情況均有 $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=2$，而且最右三項的這些數，不管經過何種變動，均不能影響前 $n-3$ 項，也就是說 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-3}$ 是長度爲 $n-3$ 的好數列，由歸納法假設，其各項和最少是 $\left\lceil \frac{2(n-3)}{3} \right\rceil$，所以 a 的各項和最少是 $\left\lceil \frac{2(n-3)}{3} \right\rceil+2=\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$。

因此，數列長度 1998 的答案是 $\left\lceil \frac{2\times 1998}{3} \right\rceil=1332$。

參、獨立研究試題

(一)甲組試題

獨立研究(一)

問題 1-1：令 n 爲正整數，而且 $n \geq 2$。設

$$P(n)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3+1}{k^3-1}\text{ 。}$$

若 $a_1,a_2,\cdots,a_{430}$ 爲相異的正整數，且都不等於 1。試證：存在兩個 $i,j(1\leq i,j\leq 430, i\neq j)$，使得

$$\left|P(a_i)-P(a_j)\right|<\frac{1}{1998}\text{ 。}$$

問題 1-2：試確定所有的正整數 n，使得對於任意滿足 $n \mid ab+1$ 的整數 a,b 也會滿足 $n \mid a+b$。

獨立研究(二)

問題 2-1：設 a,b 與 c 爲三角形的三邊長，試確定函數

$$f(a,b,c)=\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc}$$

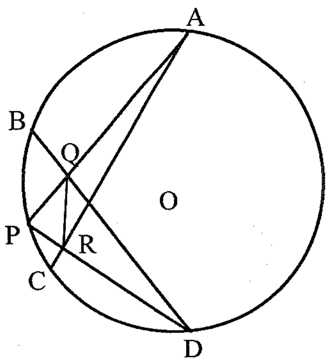
是否有最大值？是否有最小值？

問題 2-2：已知 A,B,C,D 爲圓 O 上相異四點，使得

$$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=60^\circ\text{ 。}$$

P 爲弧 BC 上之任意點，PD 與 AC 相交於 R, PA 與 BD 相交於 Q，

證明：$\angle PQR=3\angle PAC.$



獨立研究(三)

問題 3-1：定義函數 f 爲

$$f(x,y,z,w)=(xy,yz,zw,wx)$$

一點列 $P_n=(x_n,y_n,z_n,w_n), n=1,2,\ldots$。滿足 $P_{n+1}=f(P_n)$ 其中，x_n,y_n,z_n,w_n 皆爲正數。求證：若存在整數 $k>1$，使得 $P_k=P_1$，則 $P_1=(1,1,1,1)$。

問題 3-2：試求出所有滿足下列等式的整數解 (x,y)：

$$[4\sqrt{3}x]+3=[\sqrt{3}y-\sqrt{3}]+3y,$$

其中 $[t]$ 表示不大於 t 的最大整數。

(二)乙組試題

獨立研究(一)

問題 1-1：已知 ΔABC 爲銳角三角形，設 ΔABC 中從 A,B,C 三頂點到其對邊所作之高分別交其對邊於 D,E 及 F 三點。經由 D 點且平行於 $\overline{EF}$ 之直線分別交 $\overleftrightarrow{AC}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 Q 與 R，P 爲 $\overleftrightarrow{EF}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 之交點。試證：ΔPQR 的外接圓通過 $\overline{BC}$ 之中點 M。

問題 1-2：設 $A-BCD$ 爲一四面體，A',B',C' 及 D' 分別在 $\Delta BCD,\Delta CDA,\Delta DAB,\Delta ABC$ 內部的點。已知 A',B',C',D' 四點中之任二點都與 A,B,C,D 四點中的某二點同在一平面上。試證：$\overleftrightarrow{AA'},\overleftrightarrow{BB'},\overleftrightarrow{CC'}$,及 $\overleftrightarrow{DD'}$ 四線共點。

獨立研究(二)

問題 2-1：設 x 爲實數時，$\{x\}$ 表示 x 和與 x 最接近的整數之距離。且當 n 爲正整數時，

$$S_n=\sum_{m=1}^{6n-1}\min\left(\left\{\frac{m}{6n}\right\},\left\{\frac{m}{3n}\right\}\right)$$

其中 $\min(a,b)$ 代表 a,b 兩數中的最小數。試確定 S_{1998} 的值。

問題 2-2：試找出所有滿足下列條件的函數 f：

(1) $f:R\to R$

(2) $f(xf(x)+f(y))=(f(x))^2+y$ 對任意的 $x,y\in R$ 都成立。

獨立研究(三)

問題 3-1：甲、乙兩人依下列規則來拿一堆 n 個火柴盒的遊戲：

(1)甲先拿，再由乙拿依次輪流，每次至少拿一盒。

(2)甲第一次至多拿 $n-1$ 盒，輪到下一個所拿的盒數不能多於前一個所拿的個數。

(3)最後拿光者勝利。

試確定所有 n 的值，使得先拿的甲有必勝策略。

問題 3-2：設 N_n 表示所有滿足下列等式的正整數有序對 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的個數：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=1$$

試確定 N_{10} 的奇偶性。