只用圓規作圖

林雲壽

國立臺灣師範大學　附屬高級中學

一、前　言：

我的孩子在台北市某市立高中就讀高二，他們的數學科暑假作業有一試題如下：

給定平面上不共線三點 A，B，C，你能只用圓規找出△ABC的外心位置嗎？

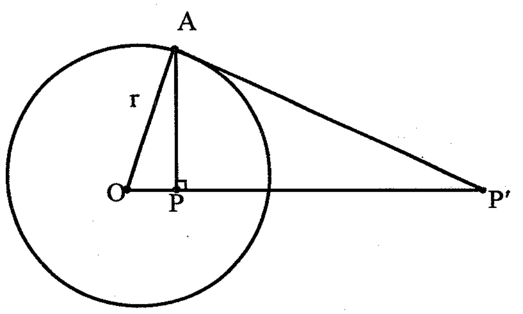
請作圖並寫出作法，不准使用直尺或類似之工具。

我嚇了一跳，只用圓規作圖不能用直尺，如何找出三角形外接圓的圓心？到處問同事及朋友，均得不到解決之方法。只好自己翻翻書本，查查資料，整理出這個問題的作法。

二、本　文：

(一)圓的鏡像點

設圓 O 的圓心為 O，半徑為 r，點 P 不是圓心 O，若點 P′ 在射線 $\overrightarrow{OP}$ 上且滿足 $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$，則點 P′ 叫做點 P 關於圓 O 的鏡像點（或稱為反演點 the inverse points）。



圖一

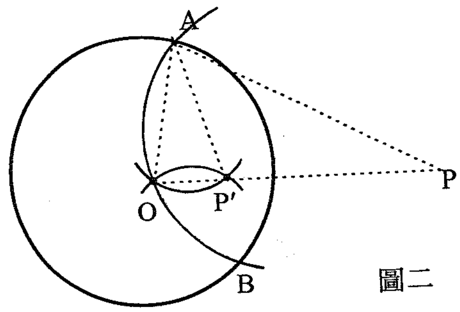
鏡像點是存在的。如圖一，設 $\overline{AP'}$ 是圓 O 的切線，在直角△OAP′ 中，$\overline{AP}$ 是斜邊上的高，故 $r^2=\overline{OA}^2=\overline{OP}\cdot\overline{OP'}$。因為若 $\overline{OP}<r$，則 $\overline{OP'}>r$；若 $\overline{OP}>r$，則 $\overline{OP'}<r$，所以若 P 在圓內，則 P′ 在圓外；若 P 在圓外，則 P′ 在圓內；若 P 在圓上，則鏡像點 P′ 就是 P 點自己。

(二)如何只用圓規作圓鏡像點

(1)假設 P 在圓 O 外（見圖二）

作法：①以 P 為圓心，$\overline{PO}$ 為半徑畫一弧，交圓 O 於 A，B 兩點。

②各以 A，B 為圓心，以 $\overline{AO}=\overline{BO}=r$ 為半徑各畫一弧，兩弧交於 O, P′ 兩點，則 P′ 即為 P 的圓鏡像點。



圖二

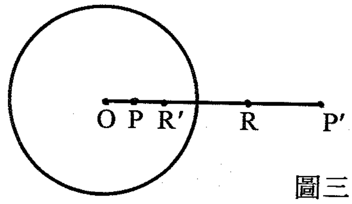
證明：連接 $\overline{AP}$, $\overline{OP}$, $\overline{AO}$, $\overline{AP'}$, 因 $\overline{PA}=\overline{PO}$（半徑），$\overline{AO}=\overline{AP'}$ 且 $\angle AOP'=\angle POA$，故等腰 $\Delta AOP'$ 與等腰 ΔPOA 相似，得 $\dfrac{AO}{OP'}=\dfrac{OP}{AO}$，即 $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\overline{OA}^2=r^2$

(2)假設 P 在圓 O 內（見圖三）

作法：①先作 $\overline{OR}=n\overline{OP}$，n是選擇的自然數倍，使 R 點在圓外即可（其詳細的圓規作圖見(三))

②再作 R 的圓鏡像點 R′（見(二)之(1)）

③再作 $\overline{OP'}=n\overline{OR'}$，則 P′ 即為 P 的圓鏡像點。



圖三

證明：$r^2=\overline{OR}\cdot\overline{OR'}=(n\overline{OP})\cdot\overline{OR'}=\overline{OP}\cdot(n\overline{OR'})=\overline{OP}\cdot\overline{OP'}$

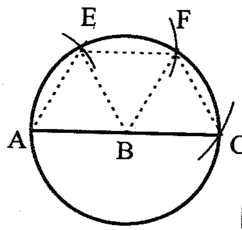
(三)如何只用圓規作一線段的 2 倍

已知：線段 AB，

求作：$\overline{AC}=2\overline{AB}$。

作法：①以 B 為圓心，以 $\overline{BA}$ 為半徑畫一圓。

②從 A 開始（圓心），以 $\overline{AB}$ 為半徑，依次在圓周上畫三個弧 AE, EF, FC，則 C 點即為所求。（見圖四）



圖四

證明：ΔABE, ΔBEF, ΔBFC 均是正 Δ，$\angle ABC=180°$, $\overline{AC}$ 是圓的直徑。

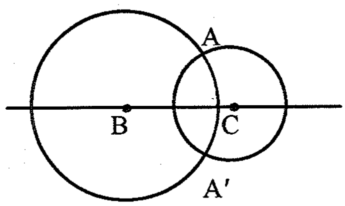
註：線段的 2 倍作出，依此方法再作出一倍，便得 3 倍線段，如此可作出 4 倍，5 倍，…，n 倍線段等。

(四)直線對稱點的圓規作圖

已知：直線 BC （或只有 B,C 兩點）及線外一點 A

求作： A 點關於直線 BC 的對稱點 A′

作法：以 B,C 為圓心，$\overline{BA}$與$\overline{CA}$各為半徑畫圓，兩圓交於 A 與 A′，則 A′ 即為所求。（見圖五）



圖五

(五)圓鏡像點的坐標表示

設圓 O 的方程式為 $x^2+y^2=r^2$，點$P(x_0, y_0)$，因O, P, P′ 共線，設鏡像點 $P'(tx_0, ty_0)$, $t>0$，代入 $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$ 得 $t=\dfrac{r^2}{a^2+b^2}$ ，故 p 的圓鏡像點為 $p'\left(\dfrac{r^2x_0}{x_0^2+y_0^2}, \dfrac{r^2y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)$

(六)線對稱點的坐標表示

設 $A(x_0, y_0)$與直線$\ell: ax+by+c=0$ ，則 A 點關於 ℓ 的對稱點為

$A'\left(x_0-\dfrac{2a甲}{a^2+b^2}, y_0-\dfrac{2b甲}{a^2+b^2}\right)$ ，其中 $甲=ax_0+by_0+c$

證明：過 A 作垂線，其參數式為$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$

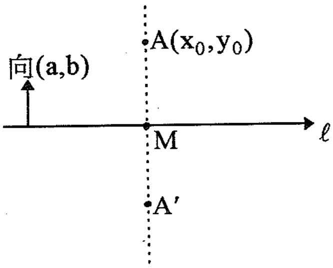
（因為向量(a,b)是 ℓ 的法向量）

代入 ℓ 中， $a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0$

$$\Rightarrow t=\frac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}=\frac{-甲}{a^2+b^2}$$

代回得正射影點 $M\left(x_0-\dfrac{a甲}{a^2+b^2}, y_0-\dfrac{b甲}{a^2+b^2}\right)$

對稱點 $A'=2M-A=\left(x_0-\dfrac{2a甲}{a^2+b^2}, y_0-\dfrac{2b甲}{a^2+b^2}\right)$



圖六

(七)圓鏡像的變換

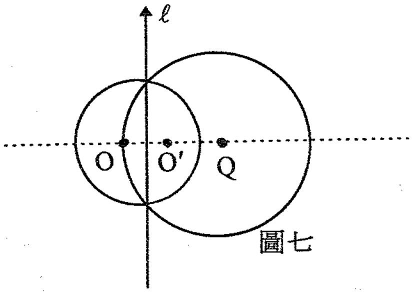
在圓 O 的圓鏡像變換下，不經過 O 點的直線 ℓ ，變換成過 O 點的圓，且此圓的圓心 Q 是點 O 關於 ℓ 的線對稱點O′ 的圓 O 鏡像點。

證明：(1)設圓 O 為 $x^2+y^2=r^2$，且 P 在 $\ell: ax+by+c=0$上任一點($c\neq 0$)令 P 的圓鏡像為 $P'(x_0,y_0)$ ，要找出P′ 的軌跡方程式。由

(五)可知 $P\left(\dfrac{r^2x_0}{x_0^2+y_0^2}, \dfrac{r^2y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)$ ， P 在 ℓ 上，

代入得 $a\left(\dfrac{r^2x_0}{x_0^2+y_0^2}\right)+b\left(\dfrac{r^2y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)+C=0$

去分母得 $c(x_0^2+y_0^2)+ar^2x_0+br^2y_0=0$



圖七

這是圓的方程式，表示 P′ 的軌跡爲過 O 點的圓（無常數項）

上述圓的圓心 $Q\left(\dfrac{-ar^2}{2c}, \dfrac{-br^2}{2c}\right)$

(2)由(六)可知 O(0,0)關於 ℓ: $ax+by+c=0$ 的線對稱點爲 $O'\left(\dfrac{-2ac}{a^2+b^2}, \dfrac{-2bc}{a^2+b^2}\right)$

再計算點 O′ 關於圓 O 的圓鏡像點(x,y)

先算 $\left(\dfrac{-2ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{-2bc}{a^2+b^2}\right)^2=\dfrac{4c^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}=\dfrac{4c^2}{a^2+b^2}$，

故 $x=\dfrac{r^2\left(\dfrac{-2ac}{a^2+b^2}\right)}{\dfrac{4c^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{-ar^2}{2c}$，$y=\dfrac{r^2\left(\dfrac{-2bc}{a^2+b^2}\right)}{\dfrac{4c^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{-br^2}{2c}$

O′ 的圓鏡像點 $\left(\dfrac{-ar^2}{2c}, \dfrac{-br^2}{2c}\right)$ 正好是(1)中所計算出圓的圓心，這表示直線 ℓ 在圓 O 的鏡像變換下所得的圓之圓心 Q 恰好是點 O 的線對稱點 O′ 的圓鏡像點(見圖七）。

(八)如何只用圓規畫圓經過三個已知點

已知：不共線的三點 A,B,C

求作：作一圓經過 A,B,C（只准用圓規）

作法：(1)以 A 爲圓心，適當長爲半徑畫一圓 A。

(2)各作 B,C 關於圓 A 的圓鏡像點B′,C′。

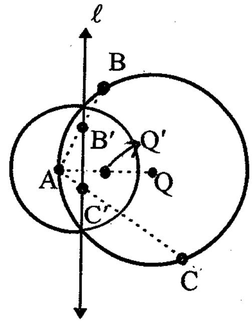
(詳細作法見(二))

(3)作 A 關於直線 B′C′ 的線對稱點 Q′。

(詳細作法見(四))

(4)作 Q′ 關於圓 A 的圓鏡像點 Q，

（詳細作法見(二)）則 Q 點即爲所求的圓心。（見圖八）



圖八

註：此時，不過 A 的直線 B′C′ 經圓 A 的鏡像變換下，變成過 A 點的圓 Q。

三、結　語

學校所出的暑假作業居然如此複雜，對於高一升高二的學生，是不是超出範圍了呢？我們出作業給學生做，要注意難度，不可草率行事。

參考書目

R. Courant and H. Robbins, What is Mathematics?, Oxford University Press, Oxford. pp.140~p.146(1941).