尋找配對的機率

邱坤毅
省立臺東高級中學

一、前　言：

偶然的機會看到中國電視公司推出由胡瓜先生及高怡平小姐主持的電視節目－“非常男女”，在男女雙方精彩的對話之餘，發現零配對的情形很少見，今我們做一數學化的思考－假設不考慮這群男女的感情因素，在隨機的狀態下，產生零配對的機率爲何？當男女人數不同時又是如何？

本文使用的原理爲逐步淘汰原理(The principle of inclusion and exclusion)或稱爲排容原理，亦是高中教材第四冊中 De Morgan's Law 的應用，因筆者所學有限，疏漏與不智處，敬請諸位先進不吝指正。

二、本　文：

(一)遊戲規則

n 女 m 男玩配對遊戲，每人限投異性一票，若男女雙方互投則形成一配對，如三女 ABC ，四男甲乙丙丁以符號 A→甲表 A 女選甲男， B↔乙表 B 女與乙男彼此互選形成一個 match 。

(二)排容原理：

設 S 是有限集合，$P_1, P_2 \ldots\ldots, P_m$ 是 m 個性質。A_i 表示 S 中具有性質 P_i 的元素構成的子集，此時 S 中不具有性質 $P_1, P_2 \ldots\ldots, P_m$ 的元素個數爲：

$$|A_1' \cap A_2' \ldots\ldots \cap A_m'| = |S| - \sum_{i=1}^{m}|A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m}|A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le m}|A_i \cap A_j \cap A_k|.$$

$$\ldots\ldots + (-1)^m|A_1 \cap A_2 \ldots\ldots \cap A_m| \qquad (|A| \text{表 A 集合的元素個數})$$

證明：我們只需考慮任一元素 $x \in S$ 在本定理出現的次數，即 x 不具 $P_1, P_2 \ldots\ldots, P_m$ 時，等號右邊計 1 次，而 x 至少具其中一條性質時則計 0 次。

(1) $x \notin A_i \quad i = 1,2,3\ldots\ldots,m$；令 T={1, 2, 3,…,m}對 T 的 2 －組合都有 $x \notin A_i \cap A_j$，對 T 所有的 3 組合都有 $x \notin A_i \cap A_j \cap A_k$…………直到 $x \notin A_1 \cap A_2 \ldots\ldots \cap A_m$ 但 $x \in S$，此時 x 的次數爲 $1 - 0 + 0 \ldots\ldots\ldots + (-1)_0^m = 1$ 次 。

(2)x 至少落於一個 A_i 內：若 x 共具有性質 $P_{i1}, P_{i2}, \ldots\ldots P_{in}$ 其中 $1 \le i_1 < i_2 \ldots. < in \le m$

則 x 在等號的右式中對 $|S|$ 計 1 次，對 $\sum_{i=1}^{m}|A_i|$ 計 C_1^n 次，對 $\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|$ 計 C_2^n 次，

……故總次數為 $1-C_1^n+C_2^n-C_3^n\cdots\cdots+(-1)^nC_n^n=(1-1)^n=0$ 次

由(1)(2)證得此原理。

另由 De Morgan's Law 得

$$|A_1\cup A_2\ldots\cup A_m|=|S|-|(A_1\cup A_2\ldots\ldots\cup A_m)'|$$

$$=|S|-|A_1'\cap A_2'\ldots\ldots\cap A_m'|\text{（由排容原理）}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|\ldots\ldots+(-1)^{m+1}|A_1\cap A_2\ldots\ldots\cap A_m|\ \#$$

(三)從簡單的例子找規則：

我們先考慮三女四男的情形，設三女為 ABC ，四男為甲乙丙丁， match 的對數由 0~3 。每一女生可有 4 種選擇，每一男生可有 3 種選擇故 $|S|=4^3\cdot 3^4=5184$（乘法原理）

1° 0個 match ：

設 E_1 表 $A\leftrightarrow$ 甲的事件
E_2 表 $A\leftrightarrow$ 乙的事件
E_3 表 $A\leftrightarrow$ 丙的事件
E_4 表 $A\leftrightarrow$ 丁的事件
E_5 表 $B\leftrightarrow$ 甲的事件
E_6 表 $B\leftrightarrow$ 乙的事件
⋮　⋮　⋮
E_{12} 表 $C\leftrightarrow$ 丁的事件

而 Mi 表有 i 個 match 的事件

所求 $=|E_1'\cap E_2'\ldots\ldots\cap E_{12}'|$

$$=|S|-\left|\bigcup_{i=1}^{12}E_i\right|$$

(a)在 A↔甲的情下； B 、 C 、乙、丙、丁可任投故

$|E_1|=4^2\cdot 3^3$ 故 $\sum_{i=1}^{12}|E_i|=C_1^3P_1^4\cdot 4^2\cdot 3^3$

(b)因 A 不可能同時投甲乙所以 $|E_1\cap E_2|=0$ 那 2 個 match 的有幾種呢？

今以圖解之：

(1) A B (2) A B (3) A B
↕↕　↕↕　↕↕……先將 AB 置於上後取甲乙丙丁中的 2 人於其下做排列有 P_2^4
甲乙　乙甲　甲丙

種，又 AB 可換以字母順序有 C_2^3 種換法故共有 $C_2^3\times P_2^4$ 種，而 B 、乙、丙可任投得 $|E_1\cap E_{12}|=4^1\times 3^2$ ，由對稱性知 $\sum_{1\le i<j\le 12}|E_i\cap E_j|=C_2^3P_2^4 4^1\cdot 3^2$

(c)同理 $\sum_{1\le i<j<k\le 12}|E_i\cap E_j\cap E_k|=C_3^3P_3^4 4^0\cdot 3^1$

由(a)(b)(c)可得 $|M_0|$(0 match 的個數) $=C_0^3P_0^4 4^3\cdot 3^4-C_1^3P_1^4 4^2\cdot 3^3+C_2^3P_2^4 4^1\cdot 3^2$

$$-C_3^3P_3^4 4^0\cdot 3^1=1224\text{種}$$

2° 1個 match ：

設 F_1 表 A↔甲的情形下 B↔乙的事件

F_2 表 A↔甲的情形下 B↔丙的事件

F_3 表 A↔甲的情形下 B↔丁的事件

F_4 表 A↔甲的情形下 C↔乙的事件

F_5 表 A↔甲的情形下 C↔丙的事件

F_6 表 A↔甲的情形下 C↔丁的事件

我們先假設 A↔甲：因只有 1 個 match 在 A↔甲之情形下不能發生 $F_1, F_2, \ldots\ldots, F_6$

故只有 A↔甲的情形有

$|F_1' \cap F_2' \ldots\ldots \cap F_6'| = C_0^2 P_0^3 4^2 \cdot 3^3 - C_1^2 P_1^3 4^1 \cdot 3^2 + C_2^2 P_2^3 4^0 \cdot 3^1 = 234$種

另 A↔乙亦有 234 種故 1 個 match $|M_1| = C_1^3 P_1^4 \times 234 = 2808$種

同理 2 個 match $|M_2| = C_2^3 P_2^4 (4^1 \cdot 3^2 - C_1^1 P_1^2 4^0 \cdot 3^1) = 1080$種

3 個 match $|M_3| = C_3^3 P_3^4 4^0 \cdot 3^1 = 72$種

由上可知發生 0 match 的機率為 $\dfrac{1224}{5184} \fallingdotseq 0.236$

1 match 的機率為 $\dfrac{2808}{5184} \fallingdotseq 0.542$

2 match 的機率為 $\dfrac{1080}{5184} \fallingdotseq 0.208$

3 match 的機率為 $\dfrac{72}{5184} \fallingdotseq 0.014$

而 $\{M_0, M_1, M_2, M_3\}$ 為 S 的一個分割可由 $|M_0| + |M_1| + |M_2| + |M_3| = |S|$ 獲得驗證。

(四)若可以投廢票呢？

這是非常合理的情形，對異性皆不滿意而無法做選擇時我們允許可投廢票，那(三)的結果會改變很多嗎？我們還是以三女四男為例，因每人多了一種選擇所以 $|S| = (4+1)^3(3+1)^4 = 32000$

1° 0個match：（仿(三)1°）

$$|M_0| = |E_1' \cap E_2' \ldots\ldots \cap E_{12}'| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{12} E_i\right| = 5^3 4^4 - C_1^3 P_1^4 5^2 \cdot 4^3 + C_2^3 P_2^4 5^1 \cdot 4^2 - C_3^3 P_3^4 5^0 \cdot 4^1$$

$= 15584$種　機率為 $\dfrac{15584}{32000} = 0.487$

2° 同理 1 match（仿(三) 2°）：

$|M_1| = C_1^3 P_1^4 (5^2 \cdot 4^3 - C_1^2 P_1^3 5^1 \cdot 4^2 + C_2^2 P_2^3 5^0 \cdot 4^1) = 13728$種　機率為0.429

2 match

$|M_2| = C_2^3 P_2^4 (5^1 \cdot 4^2 - C_1^1 P_1^2 5^0 \cdot 4^1) = 2592$種　機率為0.081

3 match

$|M_3| = C_3^3 P_3^4 (5^0 \cdot 4^1) = 96$種　機率為0.003

(五)一般化：

1° 由上可知 n 女 m 男($n \leq m$)做配對遊戲則恰含 k 個 match ($0 \leq k \leq n$) M_k 的個數為

$$C_k^n P_k^m (m^{n-k} \cdot n^{m-k} - C_1^{n-k} P_1^{m-k} m^{n-k-1} \cdot n^{m-k-1} \ldots\ldots + (-1)^{n-k} C_{n-k}^{n-k} P_{n-k}^{m-k} \cdot m^{\circ} \cdot n^{m-n})$$

$$= C_k^n P_k^m \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_i^{n-k} P_i^{m-k} m^{n-k-i} n^{m-k-i} (\text{其中} |S| = m^n \cdot n^m)$$

因 $\{M_0, M_1, \ldots\ldots, M_n\}$ 形成 S 的一個分割故

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_k^n P_k^m \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_i^{n-k} P_i^{m-k} m^{n-k-i} n^{m-k-i} \right) = m^n \cdot n^m$$

2° 若可投廢票則恰含 k 個 match M_k 的個數($0 \leq k \leq n$)　為

$$C_k^n P_k^m [(m+1)^{n-k} (n+1)^{m-k} - C_1^{n-k} P_1^{m-k} (m+1)^{n-k-1} (n+1)^{m-k-1}$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{n-k} C_{n-k}^{n-k} P_{n-k}^{m-k} \cdot (m+1)^0 (n+1)^{m-n}]$$

$$= C_k^n P_k^m \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_i^{n-k} P_i^{m-k} (m+1)^{n-k-i} (n+1)^{m-k-i} (|S| = (m+1)^n (n+1)^m)$$

$$\text{而} \sum_{k=0}^{n} (C_k^n P_k^m \left(\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_i^{n-k} P_i^{m-k} (m+1)^{n-k-i} (n+1)^{m-k-i} \right)) = (m+1)^n (n+1)^m$$

3° 當 n>m 時不過是將各式中的 m,n 互換而已。

三、結　語：

同樣是三女四男做配對遊戲，不可投廢票的機率與可投廢票的情形比較發現零配對的機率由 0.236 增為 0.487，而 1 個 match 的機率由 0.542 降為 0.429 ， 2 個 match 由 0.208 降為 0.081 ， 3 個 match 由 0.014 降為 0.003 ，這與我們的直覺是相符的，即若可投廢票的話產生 match 的機會就會減少，因此類似"非常男女"這種電視節目為何要限制選一異性做最佳配對的理由應是可以理解的。

此文是由一個簡單例子出發，尋找其規律，其間畫了許多配對的情形才有本文中(三) 1° 的配置圖，而得到一般性的結論。有時候換個簡單的角度思考問題會有意想不到的結果，在做"數學實驗"的過程中"以簡馭繁"往往能展現臨門一腳的妙用。希望此文對有興趣的高中生能有些助益。

四、參考資料

1.N. Ya. Vilen Kin 著（林福來譯）(1984-9)組合理論，第 23 頁，國立編譯館，正中書局印行。

2.高中基礎數學第四冊(1994)，國立編譯館。

3.屈婉玲(1989.11)組合數學，第 59 頁。北京大學出版社。

4.許志農(1996.2)算術與幾何，第 93 頁。華太印刷公司。