中學數學挑戰徵答題參考解答評析

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 2016

試找出所有滿足下列聯立方程組的實數解 x_1，x_2，⋯，x_n：

$$\begin{cases} x_1+\log(x_1+\sqrt{x_1^{\ 2}+1})=x_2 \\ x_2+\log(x_2+\sqrt{x_2^{\ 2}+1})=x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}+\log(x_{n-1}+\sqrt{x_{n-1}^{\ \ 2}+1})=x_n \\ x_n+\log(x_n+\sqrt{x_n^{\ 2}+1})=x_1 \end{cases}$$

解答：$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$顯然是方程組之一組解。

我們將證明 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 是方程組的唯一解。

令 $f(x)=x+\log(x+\sqrt{x^2+1})$

(i)若 $x>0$，$x+\sqrt{x^2+1}>1$，$\therefore f(x)-x=\log(x+\sqrt{x^2+1})>\log 1=0$

$\therefore f(x)>x$；故當 $x_1>0$時，

$x_1<f(x_1)=x_2<f(x_2)=x_3<\cdots<f(x_{n-1})=x_n<f(x_n)=x_1$

得到矛盾結果，$\therefore x_1\le 0$ 。

(ii)若 $x<0$，$x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}<1$

$\therefore f(x)-x=\log(x+\sqrt{x^2+1})<\log 1$，$\therefore f(x)<x$；故當 $x_1<0$ 時，

$x_2=f(x_1)<x_1=f(x_n)<x_n=f(x_{n-1})<\cdots<x_3=f(x_2)<x_2$

亦產生矛盾結果，$\therefore x_1\ge 0$。

綜合以上可知，$x_1=0$此時$x_2=\cdots=x_n=0$

此方程組除 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=0$ 之外，無其他解。

《解題重點》

1.對數基本性質：$\log x>0\Leftrightarrow x>1$ 。2.分類討論的技術。3.矛盾證法。

《評析》

1.本題配合高一下基礎數學對數題材命題，僅須具備基本正確的對數概念，即可輕易破解，爲一簡單題型，此次參與本題徵答者幾乎都完成此題，全部 53 位參答者中計有北一女曾于容等 51 人（含鳳山國中朱浩瑋），得分率高達 0.98，與原預期完全符合。

2.絕大多數採用類似參考解題之方法，亦有少數是利用”全部相加後得

$\log(x_1+\sqrt{x_1^{\,2}+1})+\cdots+\log(x_n+\sqrt{x_n^{\,2}+1})=0$

$\Rightarrow \log[(x_1+\sqrt{x_1^{\,2}+1})\cdots(x_n+\sqrt{x_n^{\,2}+1})]=0$

$\Rightarrow (x_1+\sqrt{x_1^{\,2}+1})\cdots(x_n+\sqrt{x_n^{\,2}+1})=1$"再分別就 x 之正負性判別之。

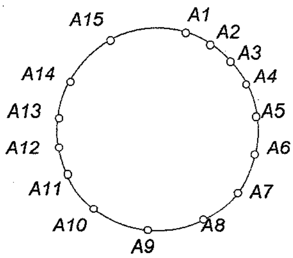
3. 本題由表面上似爲繁複的方程組，但僅須仔細推敲即可導出 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 之解，經思考即可猜測無其他解，再設法說明其道理即可。

4.參與徵答者多未將 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=0$ 符合原題的文字寫出來，這點應寫明避免被扣分。

問題編號 2017

圓周上有互異的 15 點。今選擇紅、藍、綠、黃四種顏色中之一色對此 15 點著色，規定：若某點著了紅色或藍色時，則此點順時針方向後的第 1 點和第 8 點不可著藍色也不可著綠色；若某點著了黃色或綠色時，則此點順時針方向後的第 1 點和第 8 點不可著紅色也不可著黃色。試確定這 15 點所有可能著色結果。

解答：我們將圓周上互異的 15 點，依順時針方向依序在各點標上符號 $A_1,A_2,\cdots,A_{15}$，如圖，規定 A_k 點順時針方向後第 t 點爲 A_{k+t}，



所以 $A_{k+15n}=A_k$，$k=1,2,\cdots 15$，$n=0$ 或 $n\in N$

(1)若 A_1 著紅色，則 A_2 和 A_9 可以著紅色或著黃色；設 A_9 著黃色，則 A_2 只能著藍色或著綠色，產生矛盾，所以 A_9 須著紅色。同理，若 A_2 著黃色，則 A_3 須著藍色或著綠色，此亦矛盾，所以 A_2 須著紅色，仿上重覆討論各點可得如下結論：若 A_k 著紅色，則 A_{k+1} 和 A_{k+8} 均需著紅色，$k=1,\cdots\cdots,15$，且進而得知，"若一點著紅色，則所有點均須著紅色"。

(2)因爲討論 A_1 著綠色和著紅色，同理，我們亦有以下結論："若一點著綠色，則所有點均須著綠色"。

(3)若 A_1 著藍色，由(1)知沒有點能著紅或綠（因只要一點著紅色，則全部均須著紅色，著綠色亦同，）可見 A_2 和 A_9 只能著黃色。若 A_9 著黃色，則 A_2 不能著紅色、黃色、綠色，此爲矛盾，所以沒有點能著藍色的。

同理，亦沒有點可著黃色。

綜合(1)(2)(3)可知，這相異 15 點可能著色，結果爲全部著紅或全部著綠。

《解題重點》

1.將 15 點依順時針方向標上符號 $A_1,A_2,\cdots,A_{15}$。

2.就 A_1 分別著紅、藍、綠、黃四色之一時討論出 A_2 和 A_9 應著之顏色。

3.著紅和著綠成對稱型討論；著藍和著黃成對稱型討論。

《評析》

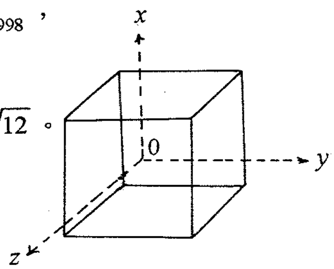
1.本題屬簡易組合數學之題，比較新的簡易題型引發學生求解之樂趣，參與徵答者不少，計有雄中林耕賢等 39 人（含鳳山國中朱浩瑋）得分 0.91 亦高。

2.本題具清析邏輯推理分類能力者，即可輕易求解，參與徵答者幾乎都能得到完整之解答。

3.競賽中組合數學的題目是必備的，它的解法幾無固定模式，檢驗學生數學能力的高低是絕佳的題材，學生經較長期之涉獵，能提昇數學思考創造能力。

問題編號
2018

在稜長為 2 的正方體任取互異的 1998 個點。今以正方體中心為起點，這 1998 個點為終點做出 1998 空間向量 v_1，v_2，⋯，v_{1998}，試證可找到一組實數 a_1，a_2，⋯，a_{1998}，其中 $a_i=1$ 或 -1，$(i=1,2,\cdots,1998)$，使得 $\left|\sum_{i=1}^{1998}a_iv_i\right|\le\sqrt{12}$。



解答：為了方便證明，我們建立下面坐標系：

不失一般性，我們取正方體中心為原點 $O(0,0,0)$

八個頂點坐標為(a,b,c)，其中 a,b,c 均為 1 或-1，如圖。如此我們可以很清楚地描述此正方體上的點 (x,y,z)，其中 $|x|\le1$，$|y|\le1$，$|z|\le1$。事實上我們可以證明：

用 $n(n\ge4)$ 代替 1998 時，原命題依然成立。

(1)當 $n=4$ 時，令 $v_i=(x_i,y_i,z_i)$，$|x_i|\le1$，$|y_i|\le1$，$|z_i|\le1$，$\therefore|v_i|\le\sqrt{3}$，$i=1,2,3,4$。

因 (a_1,a_2,a_3,a_4) 所有可能取法有 $(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)$ 16 種。將此 16 種 (a_1,a_2,a_3,a_4) 產生的 16 個 $|a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4|^2$ 相加可得

$$|v_1+v_2+v_3+v_4|^2+|-v_1+v_2+v_3+v_4|^2+\cdots\cdots+|-v_1-v_2-v_3-v_4|^2$$
$$=16(|v_1|^2+|v_2|^2+|v_3|^2+|v_4|^2)$$
$$|v_1+v_2+v_3+v_4|^2+|-v_1+v_2+v_3+v_4|^2+\cdots\cdots+|-v_1-v_2-v_3-v_4|^2$$
$$\le4(\sqrt{3})^2=12$$

這 16 個 $|a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4|^2$ 中必至少存在一個不大於 12，所以當 $n=4$ 時，命題成立。

(2)設 $n=k-1$ 時，命題成立。（$k\ge5$）

在不失一般性情況下，不妨設每一個 v_i 的 x 坐標大於等於 0。（因若 v_i 的 x 坐

標爲負，可取 $a_i=-1$），用平面 $x=0$ 分割正方體而得 $x\geq 0$ 的半邊和 $x\leq 0$ 的半邊，可見 v_1，v_2，…，v_{k-1} 均落在 $x\geq 0$ 的半邊上。

我們再用 $y=0$ 和 $z=0$ 兩平面分割 $x\geq 0$ 的半邊可得四塊邊長爲 1 的小正方體。由鴿籠原理知，至少有兩個向量落在同一小正方體內，在不失一般性情況下，可設 v_1 和 v_2 落在同一小正方體內，且若 $v_1-v_2=(p,q,r)$，則 $|p|\leq 1$，$|q|\leq 1$，$|r|\leq 1$。

今考慮 $k-1$ 個向量 (v_1-v_2)，v_3，…，v_k，由歸納法假設知存在 a_3，a_4，…，$a_k\in\{-1,1\}$，

使得 $|v_1-v_2+a_3v_3+\cdots+a_kv_k|\leq\sqrt{12}$。所以取 $a_1=a_2=1$，a_3，a_4，…，a_k 可使 $\left|\sum_{i=1}^{k}a_iv_i\right|\leq\sqrt{12}$。所以當 $n=k$ 時，命題亦成立。故由數學歸納法得證。因本題是 n=1998 之特例，所以亦必成立。

《解題重點》

1.建立坐標系簡化證明。取正方體中心爲原點，八個頂點置於 $(\pm1,\pm1,\pm1)$，如此正方體上之點 (x,y,z)，有 $|x|\leq 1$，$|y|\leq 1$，$|z|\leq 1$ 關係。

2.本題用 $n(n\geq 4)$ 代替 1998，命題依然成立。

3.$n=4$ 時，因 (a_1,a_2,a_3,a_4) 中 a_1,a_2,a_3,a_4 爲 1 或-1，有 16 種情況，將此 16 種 $|a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4|^2$ 相加，其和爲 $16(|v_1|^2+|v_2|^2+|v_3|^2+|v_4|^2)$。

4.鴿籠原理。

《評析》

1.本題配合空間向量題材設計，跟上一期編號 2011 題類似之情形，比原預期難度高，顯示高中生空間向量能力欠佳，參與本題徵答者僅有雄中廖英傑等 18 人，得分率亦僅 0.52，此次五道題中以本題難度最高。

2.基本平均值之概念是很有效的技術，是一項值得學習的題材。

3.有了上一期平面向量之相關題後，此次同學們解此題之技巧進步有限，且書寫欠清之處仍多，致遭扣分。

4.本題解題品質較佳者計有雄中廖英傑及廖健溢等 2 人。

問題編號 2019	試確定 $f(x)=x^{1998}+7x^{1997}+5$ 能否表示成兩個次數都是至少一次的整數係數多項式的乘積？

解答：事實上，對任意正整數 $n\geq 2$，$f(x)=x^n+7x^{n-1}+5$ 都不能表示成兩個次數都至少一次的整係數多項式的乘積。

當 $n=2$ 時，$f(x)$ 顯然不能表示成兩個次數都是至少一次的整數係數多項式的乘積。我們猜測 $f(x)$ 對所有 $n\geq 2$，$f(x)$ 都不能表示成兩個次數都至少一次的整係

數多項式的乘積。現用歸謬法證明此猜測是正確的，證明如下：

（1）若 $f(x)=0$ 有有理根 t，則 $t\in\{1,5,-1,-5\}$，

但 $f(1)=13$，$f(-1)\in\{-1,11\}$，$f(5)>0$，

$f(-5)=(-5)^n+7(-5)^{n-1}+5=2\cdot(-5)^{n-1}+5=5[1-2\cdot(-5)^{n-2}]$ 爲奇數

$\therefore f(x)=0$ 無有理根。

（2）設存在大於 2 的整數 m，使得 $f(x)=x^m+7x^{m-1}+5=g(x)h(x)$

其中 $g(x),h(x)$ 都是次數至少一次的整係數多項式。$\because f(x)=0$ 無有理根，所以 $g(x)=0$，$h(x)=0$ 亦無有理根。

由此推知 $\deg g(x)\ge 2$，$\deg h(x)\ge 2$，$\deg f(x)=m\ge 4$。

令 $g(x)=\sum_{i=0}^{p}a_ix^i$，$h(x)=\sum_{i=0}^{q}b_ix^i$ 且 $\deg g(x)=p$，$\deg h(x)=q$

則 $p+q=m$ 且 $2\le p$，$q\le m-2$，$\because a_0b_0=5$，且 a_0，$b_0\in Z$，

$\therefore (a_0,b_0)\in\{(1,5),(5,1),(-1,-5),(-5,-1)\}$

在不失一般性的情況下，不妨令 $(a_0,b_0)\in\{(1,5),(-1,-5)\}$，我們將證明 $5\mid b_i$，$\forall\, 1\le i\le q$，當 $i=0$ 時，$\because b_0\in\{5,-5\}$，$\therefore 5\mid b_0$

設 $i=0,1,2,\cdots,r$ 時命題成立，$0\le r\le q-1$，

即 $5\mid b_0$，$5\mid b_1$，……，$5\mid b_r$

$\because \sum_{i=0}^{r+1}a_tb_{r+1-t}=f(x)$ 的 $(r+1)$ 次項係數 $=0$，$\therefore 5\left|\sum_{i=0}^{r+1}a_tb_{r+1-t}\right.$，又

$0=\sum_{i=0}^{r+1}a_tb_{r+1-t}=a_0b_{r+1}+\sum_{t=1}^{r+1}a_tb_{r+1-t}$，而 $a_0=\pm1$，$\therefore 5\mid b_{r+1}$

由數學歸納法知 $5\mid b_0$，$5\mid b_1$，……，$5\mid b_q$

但 $1=a_pb_q\Rightarrow b_q=\pm1$ 且 $5\mid(\pm1)$ 產生矛盾，所以原假設錯誤，即不存在任何大於 2 的整數 m，使得 $f(x)=x^n+7x^{n-1}+5$ 能表示成兩個次數都是至少一次的整係數多項式的乘積。所以對所有大於等於 2 的正整數 n，$f(x)=x^n+7x^{n-1}+5$ 都不能表示成兩個次數都至少一次的整係數多項式的乘積。

因 n=1988 是特例，故 $f(x)=x^{1988}+7x^{1997}+5$ 不能表示成兩個次數都是至少一次的整係數多項式的乘積。

解法(二)：（採自雄中廖健溢之解法。）

用反證法，不妨設 $f(x)=g(x)\,h(x)$

$\because f(x)$ 的常數項爲質數，故 $g(x)$，$h(x)$ 中必有一常數項爲 ±1

不妨設 $g(x)$ 的常數項爲 ±1，即 $|g(0)|=1$

$\because f(\pm1)$，$f(\pm5)\ne 0$　故 $f(x)$ 無一次因式 $\Rightarrow \deg(g(x))>1$

令 $g(x)=x^p+a_{p-1}x^{p-1}+\cdots\cdots+a_1x\pm1$ 　　$\therefore p>1$

設 $g(x)$ 之 p 個複根為 α_1、α_2、……、α_p

$\therefore g(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_p)$ …………………①

$\because |g(0)|=1$ 　　　$\therefore |\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_p|=1$ …………………②

又 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ 　　$\therefore f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\cdots\cdots=f(\alpha_p)=0$

$$\therefore\begin{cases}\alpha_1^{1998}+\alpha_1^{1997}=-5\\ \alpha_2^{1998}+\alpha_2^{1997}=-5\\ \quad\vdots\\ \alpha_p^{1998}+\alpha_p^{1997}=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1^{1997}(\alpha_1+7)=-5\\ \alpha_2^{1997}(\alpha_2+7)=-5\\ \quad\vdots\\ \alpha_p^{1997}(\alpha_p+7)=-5\end{cases}$$

將右上全式相乘 $|(\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_p)^{1997}|\cdot|(\alpha_1+7)(\alpha_2+7)\cdots\cdots(\alpha_p+7)|=|(-5)^p|$

由② $|(\alpha_1+7)(\alpha_2+7)\cdots\cdots(\alpha_p+7)|=5^p$ ……………③

由①且 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ 　$\therefore |g(-7)|\ \big|\ f(-7)$

$\Rightarrow |(\alpha_1+7)(\alpha_2+7)\cdots\cdots(\alpha_p+7)|\ \big|\ (-7)^{1998}+(-7)^{1997}\cdot7+5=5=f(-7)$

又由③ $\therefore 5^p|5\Rightarrow p=0$ 或 1，但 $p>1$ 矛盾，故 $f(x)$ 不可分解。

《解題重點》

1.多項式函數有理根判斷法。

2.若多項式 $f(x)$ 可分解成兩個次數都至少一次的整係數多項式 $g(x),h(x)$ 的乘積，可寫成 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $\deg g(x)\ge1$，且 $\deg h(x)\ge1$。

3.用歸納法假設可分解而證出矛盾。

《解題重點》

1.本題配合整係數多項式之分解題材設計，參與徵答者比前一題略多，計有嘉中黃博鴻等 22 人，得分率 0.65 亦高出前一題。

2.本題是 1993 IMO 第一道試題改編，當年我國六位參賽代表各有不同之解法但都得滿分，締造出我國至今參賽成績最佳一次之紀錄。

3.參與徵答者均能掌控到判別無一次因式及利用反證法等之正確方向入手尤以雄中廖健溢之解法品質特佳，恰與 1993 年 IMO 之參考解答(一)相類似（參見本刊第 163 期之第 55-56 頁）。

4.基本上此題的設計來源與艾森斯坦質式判別定理有關：

設 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$ 為整係數多項式，若有一質數 q 使得：$(a)q\nmid c_n$。$(b)q\mid c_i(0\le i\le n-1)$。$(c)q^2\nmid c_0$ 則 $f(x)$ 為佈於整數系（或有理數系上）的質式。

問題編號
2020

設 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 且 $g_n(x)=x+f(x)+f(f(x))+\cdots+\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n個f}$，

其中 n 是自然數， $x>0$ 。試證明：

(i)若 $x>y>0$，則 $g_n(x)>g_n(y)$ 。

(ii)對所有 $n>1$ ， $g_n(1)=\dfrac{F_1}{F_2}+\dfrac{F_2}{F_3}+\cdots+\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ ，其中 $F_1=F_2=1$，

且 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 。

解答：(i)①當 x 是正實數時，易證 $f(x)$ 是遞減函數，且 $x+f(x)$ 是遞增函數。

②$\because f(x)$ 是遞減函數，$\therefore$ 若 $x>y>0$ 則 $0<f(x)<f(y)$，

$\therefore f(f(x))>f(f(y))$，$\therefore f(f(x))$ 是遞增函數。

因為 x 是正實數，所以 $f(x)$ 是正實數。令 $g(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{f(x)+1}$，所以對任意

正實數 x，$g(x)$ 亦為正實數。

$\therefore f(f(x))+f(f(f(x)))=g(x)+f(g(x))$ 為遞增函數。

③令 $h_k(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{k個}$，$k$ 為自然數。用數學歸納法很容易得到下面結果：

(1)若 k 是奇數，則 $h_k(x)$ 是遞減函數；若 k 是偶數，則 $h_k(x)$ 是遞增函數。

(2) $h_{k-1}(x)+h_k(x)$ 是遞增函數。（令 $h_0(x)=x$）

(a)當 n 是偶數時， $g_n(x)$ 有奇數項，我們每二項一組可得

$$g_n(x)=[x+f(x)]+[f+f(x))+[f(f(f(x)))+\cdots$$
$$+[\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{(n-2)個}+\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{(n-1)個}]+\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n個}$$

由遞增函數加遞增函數亦是遞增函數知 $g_n(x)$ 為遞增函數。

(b)當 n 是奇數時， $g_n(x)$ 有偶數項，我們每二項一組可得

$$g_n(x)=[x+f(x)]+[f+f(x))+[f(f(f(x)))+\cdots$$
$$+[\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{(n-1)個}+\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n個}]$$

所以 $g_n(x)$ 為遞增函數。由(a)、(b)知，對所有正實數 x ， $g_n(x)$ 為遞增函數，即若 $x>y>0$ ，則 $g_n(x)>g_n(y)$ 。

(ii)因為 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ ，$n\geq 1$

所以 $f(\dfrac{F_k}{F_{k+1}})=\dfrac{1}{\dfrac{F_k}{F_{k+1}}+1}=\dfrac{F_{k+1}}{F_k+F_{k+1}}=\dfrac{F_{k+1}}{F_{k+2}}$ ，k 為自然數

$f(1)=f\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right)=\dfrac{F_2}{F_3}$ ，又

$$f(f(\cdots\cdots f(1)))=f\left(f\left(\cdots\cdots f\left(\frac{F_2}{F_3}\right)\right)\right)=f\left(f\left(\cdots\cdots f\left(\frac{F_3}{F_4}\right)\right)\right)=\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}$$

所以 $g_n(1)=1+f(1)+ff(1)+\cdots\cdots+ff\cdots f(1)=\dfrac{F_1}{F_2}+\dfrac{F_2}{F_3}+\cdots\cdots+\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$

解法(二)：（採自臺師大附中王世豪之解法。）

先證 $f(f(\cdots f(x)))=f^{(n)}(x)=\dfrac{a_{n-1}x+a_n}{a_nx+a_{n+1}}$　其中，$\langle a_n\rangle$爲費波那契數列。

1.當 $n=1$ 時，$f(x)=\dfrac{0\cdot x+1}{1\cdot x+1}=\dfrac{a_0x+a_1}{a_1x+a_2}$，此命題成立

2.設 $n=k$ 時成立，即 $f^{(k)}(x)=\dfrac{a_{k-1}x+a_k}{a_kx+a_{k+1}}$，

則 $n=k+1$時，

$$f\left(f^{(k)}(x)\right)=f\left(\frac{a_{n-1}x+a_n}{a_nx+a_{n+1}}\right)=\frac{1}{\dfrac{a_{k-1}x+a_k}{a_kx+a_{k+1}}+1}=\frac{akx+ak+1}{a_{k-1}x+a_kx+a_k+a_{k-1}}=\frac{a_kx+a_{k+1}}{a_{k+1}+a_{(k+1)+1}}$$

此命題成立。

3.由數學歸納法知此命題成立。

(i) $$f^{(n)}(x)-f^{(n)}(y)=\frac{a_{n-1}x+a_n}{a_nx+a_{n+1}}-\frac{a_{n-1}y+a_n}{a_ny+a_{n+1}}=\frac{(a_{n-1}a_{n+1}-a_n{}^2)(x-y)}{(a_nx+a_{n+1})(a_ny+a_{n+1})}$$
$$=(x-y)\frac{(-1)^n}{(a_nx+a_{n+1})(a_nx+a_{n+1})}$$

不妨設 $a_{-1}=1$，$f^{(0)}(x)=x=\dfrac{a_{n-1}x+a_0}{a_0x+a_1}$，$\because x,y>0$且$\langle a_n\rangle$除$a_{-1}=1$，$a_0=0$外，其餘的 a_n 爲嚴格遞增數列，故

$a_nx+a_{n+1}>a_{n-1}x+a_n$，$a_ny+a_{n+1}>a_{n-1}y+a_n$，即

$$\frac{1}{(a_nx+a_{n+1})(a_ny+a_{n+1})}<\frac{1}{(a_{n-1}x+a_{n1})(a_{n-1}y+a_n)}$$

當 n 爲偶數時，$g_n(x)-g_n(y)$

$$=(x-y)\left[\left(\frac{1}{(a_0x+a_1)(a_0y+a_1)}-\frac{1}{(a_1x+a_1)(a_1y+a_2)}\right)+\left(\frac{1}{(a_2x+a_3)(a_2y+a_3)}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(a_3x+a_4)(a_3y+a_4)}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(a_{n-2}x+a_{n-1})(a_{n-2}y+a_{n-1})}-\frac{1}{(a_{n-1}x+a_n)(a_{n-1}y+a_n)}\right)$$
$$\left.+\left(\frac{1}{(a_nx+a_{n+1})(a_ny+a_{n+1})}\right)\right]>0$$

當 n 爲奇數時，$g_n(x)-g_n(y)$

$$=(x-y)\left[\left(\frac{1}{(a_0x+a_1)(a_0y+a_1)}-\frac{1}{(a_1x+a_1)(a_1y+a_2)}\right)+\left(\frac{1}{(a_2x+a_3)(a_2y+a_3)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{(a_3x+a_4)(a_3y+a_4)}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(a_{n-1}x+a_n)(a_{n-1}y+a_n)}-\frac{1}{(a_nx+a_{n+1})(a_ny+a_{n+1})}\right)\right]>0$$

$\therefore g_n(x) > g_n(y)$

(ii)

$$g_n(1) = f(1) + f(f(1)) + \cdots + f^{(n)}(x) = \frac{a_{-1}+a_0}{a_0+a_1} + \frac{a_0+a_1}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}+a_n}{a_n+a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$$

只要令 $< a_n > = < F_n >$ 則得證。

《解題重點》

1.若 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$，則 $f(x)$ 是遞減函數，而 $x + f(x)$ 是遞增函數。

2.令 $h_k(x) = f(f(\cdots f(x)))$，$k \in N$，用數學歸納法證出①若 k 是奇數則 $h_k(x)$ 是遞減函數。若 k 是偶數則 $h_k(x)$ 是遞增函數。② $h_{k-1}(x) + h_k(x)$ 是遞增函數。

3.由 n 是偶數、奇數均可討論出 $g_n(x)$ 是遞增函數。

《評析》

1.本題配合代數題材設計，原預估為此次五道題之最難題，但仍有台師大附中王世豪等 32 人參與徵答而得分率 0.70 亦高於前兩道題，顯示我國高中生代數能力在水準之上。

2.題型表面看起來有點複雜，但經仔細推敲了解後就不再是難題了，即可輕易找到解題線索。

3.本題解題品質較佳者計有：建中陳奕瑋、翁竟智；台師大附中王世豪；板中林穎志；雄中林政翰、林耕賢、盧佑群及廖健溢等 8 人，其中以王世豪之解法品質特佳。

評註：

1.本次徵答統計簡表如下：

總人數 52 人	問題編號	2016	2017	2018	2019	2020
	得分	342	236	66	100	157
	徵答人數	50	37	18	22	32
	得分率	0.98	0.91	0.52	0.65	0.70
一年級 27 人	得分	177	98	16	20	48
	徵答人數	26	16	5	7	11
	得分率	0.97	0.88	0.46	0.41	0.62
二年級 16 人	得分	97	82	21	43	67
	徵答人數	14	12	6	8	13
	得分率	0.99	0.98	0.50	0.77	0.74
三年級 10 人	得分	68	56	29	37	42
	徵答人數	10	9	7	7	8
	得分率	0.97	0.89	0.59	0.76	0.75
參與徵答總校數： 12 所 計： 計畫內： 11 所，非計畫內： 1 所						

2.本期參與徵答學生數及學校較上一期有明顯的增加，應與題目較簡易及雄中張本源和蘇源森兩位數學老師積極鼓勵學生參與有關。未來二年可以預見雄中的國內外數學競賽實力必然會大大提昇。

3.本期徵答成積較優異的學生計有建中陳奕瑋；臺師大附中王世豪、林建位；武陵高中劉任浩、王嘉慶；臺南一中劉育廷、賴信弘；雄中廖英傑、林耕賢、盧佑群及廖健溢等 11 人。

4.學生心得感言摘錄如下：

①此次題目似乎較簡單，但編號 2019 因段考將近，無法再花時間下去，實在可惜。自從參加徵答後，在數學上之表達能力有長足之進步，真是令人興奮。（宜蘭高中，游家瑋）

②本次題型較前幾次簡單，無須用到較高深的定理，但是結構可能還不太嚴謹，還請教授多多指教。（雄中，黎冠成）

③編號 20.16 題排列方式整齊，且可輕易地看出由其正負號，或遞增、遞減方式可得 x_i 的變化。（雄中，林國軒）

④◆ 編號 2016 題之等號左右兩方均有 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，很明顯是採用累加對消的方法，之後再討論 x 的值即可得到答案。

◆ 編號 2017 初拿到題目時，起先用畫樹狀圖來解題，結果一無所穫，之後換了另一個方向，從順時針方向第 1 點和第 8 點不可塗相同兩種顏色著手，結果，題目卻變得一目了然了。同一個題目需由各種不同角度切入，才能有所得。（雄中，劉進豐）

⑤◆ 關於 2016 題，我覺得是稍簡易的題目，只要對對數的性質有基本的認識，及會分段討論的技巧，就可解出這道題目了。

◆ 編號 2017 題，我想主要是測驗表達及討論分析能力的題目吧！（雄中，羅皓維）

⑥在做了本期的題目之後，我覺得編號 2016 ， 2017 題及 2020 的第(ii)題尚屬簡易之題型，而 2020 的(i)題之關鍵在於證出 $f^{2k}(x) > f^{2k}(y)$ 再應用至(i)題，而 2018 題應是本期最難之一題，我是參考上期 2011 題解答之作法，再作一些改變，才做出的，至於 2019 題可能因爲程度不足，而尚未做出，縱觀本期的題目難度應屬適中。（雄中，廖英傑）

⑦關於 2016 題，一開始本不做此題，後來無意間以代數法代 0 做出，得以求解，同樣地， 2017 題我也是亂畫畫出來的，好像做數學除了要一點實力，也需點運氣配合。（雄中，吳建成）

⑧編號 2017 這題目我「推」得好辛苦，不曉得答案對不對？應該有更好的方法吧！（雄中，陳皇宇）

（註：解法參閱參考解答。）

⑨這次題目 2018 ， 2019 題都不知從何做起， 2018 題寫了卻沒把握，認爲不止如此， 2018 題在平面推展到空間時亦發生障礙。（嘉中，林柏志）

⑩有時在將截稿之時才寄出，不知是否過期，我曾在 11 月份徵答時很晚寄出，不知有否寄達，有時徵答常常爲了能否寄達和有否太晚而困擾，希望能再詳述一次徵答的地點、日期、規格…等。（雄中，林家平）

(注：編號 2011 至 2015 的解答我們收到了，另外徵答規則等請參閱科教月刊第 202 期第 85 頁至網址： http://www.math.ntnu.edu.tw 處查詢。)