中學數學挑戰徵答題

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

♠本期徵答截止日期：民國87年3月12日；相關參考解答將刊於科學教育月刊第209期

問題編號 2026

試找出所有滿足下列聯立方程組的實數解 x_1，x_2，⋯，x_n，x_{n+1}，其中 x_1，x_2，⋯，$x_n \geq 1$ 且 $x_{n+1} > 0$，n 是大於 1 的整數。

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{3}} + \cdots + x_n^{\frac{1}{n+1}}}{n} = x_{n+1}^{\frac{1}{2}} \\ \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x_{n=1} \end{cases}。$$

問題編號 2027

試求所有滿足下列條件的正整數 a、b：

$a^3 + 8a^2 - 6a + 8 = (b+1)^3$。

問題編號 2028

試證下列不等式成立：

$$\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1} \geq \frac{2n+2}{n+2}\binom{2n+1}{k}$$

其中 n，k 都是正整數且 $1 \leq k \leq 2n$，$\binom{m}{l} = {}_m C_l = \dfrac{m!}{l!(m-l)!}$。

問題編號 2029

設 a，b，c 都是複數且 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$，$g(x) = x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c|$。已知 $f(x) = 0$ 的每一個根 z 的絕對值都等於 1，試證 $g(x) = 0$ 的每一個根 w 的絕對值也都等於 1。

問題編號 2030

試確定所有的正實數 x，y

使得下列四個數都是正整數而且它們四個總和為 66：

$\dfrac{x+y}{2}$，$\sqrt{xy}$，$\dfrac{2xy}{x+y}$，$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$。

注：(1)徵答題及其解答等相關資訊已出現於 WWW 網路上，

網址：http://www.math.ntnu.edu.tw

(2)徵答題之傳真電話為(02)29306547，請多多利用。