一道幾何證明題

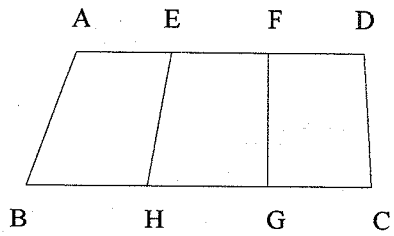
余進發
臺南市文賢國民中學

前　言：

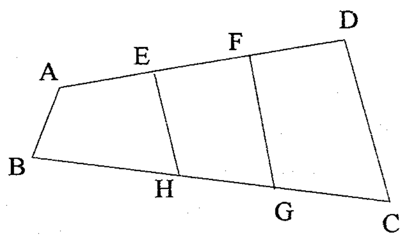
在四邊形 ABCD 中，E 、F 和 H 、G 分別是 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 的三等分點。求証：四邊形 EFGH 的面積等於四邊形 ABCD 面積的三分之一。

本題的條件和結論分別涉及線段比和面積比，在處理有關線段比和面積比的問題，通常設法歸結到三角形。

當 $\overline{AD} \nparallel \overline{BC}$ 時，如圖一，顯然利用梯形面積公式，本題即得証。本文僅針對 $\overline{AD} // \overline{BC}$ 時，如圖二，提出六種証法，供各位先進作爲教學上的參考。



圖一



圖二

第一種証法：

如圖三，連接 $\overline{AG}$、$\overline{AC}$、$\overline{EC}$、$\overline{EG}$

$\because \overline{CG} = \frac{1}{3}\overline{BC}, \overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AD}$

$\because \Delta ACG = \frac{1}{3}\Delta ABC$ ....(1)

$\Delta ACE = \frac{1}{3}\Delta ACD$ ....(2)

(1)+(2)，得

四邊形 AGCE $= \frac{1}{3} \times$ 四邊形 ABCD

$\because \overline{AE} = \overline{EF}, \overline{HG} = \overline{GC}$

$\because \Delta AEG = \Delta EFG$ ....(3)

$\Delta ECG = \Delta EHG$ ....(4)

(3)+(4)，得

四邊形 AGCE ＝四邊形 EFGH

故四邊形 EFGH $= \frac{1}{3} \times$ 四邊形 ABCD

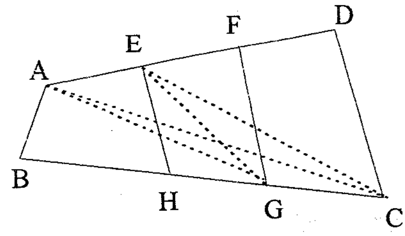
第二種証法：

如圖四，連接 $\overline{AH}$、$\overline{AC}$、$\overline{FH}$、$\overline{FC}$

$\because \overline{AF}=\frac{2}{3}\overline{AD}, \overline{CH}=\frac{2}{3}\overline{BC}$

$\because \Delta ACF=\frac{2}{3}\Delta ACD$ ......(5)

$\Delta ACH=\frac{2}{3}\Delta ABC$ ......(6)



圖三

(5)+(6)，得

四邊形 AHCF $=\frac{2}{3}\times$四邊形 ABCD

$\because \overline{AE}=\overline{EF}, \overline{HG}=\overline{GC}$

$\because \Delta EFH=\frac{1}{2}\Delta AHF$ ......(7)

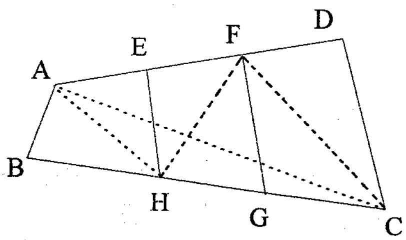
$\Delta FHG=\frac{1}{2}\Delta FHC$ ......(8)

(7)+(8)，得

四邊形 EHGF $=\frac{1}{2}\times$四邊形 AHCF

故四邊形 EFGH $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times$四邊形 ABCD

$=\frac{1}{3}\times$四邊形 ABCD



圖四

第三種証法：

如圖五，連接$\overline{AH}$、$\overline{EG}$、$\overline{FC}$

設△ ABH 、△ AEH 、△ EHG 、△ EGF 、△ FGC 、△ FCD 的面積分別為 S_1、S_2、S_3、S_4、S_5、S_6。

作$\overline{AP}\perp\overline{BC}$、$\overline{EQ}\perp\overline{BC}$、$\overline{FR}\perp\overline{BC}$，P、Q、R為垂直

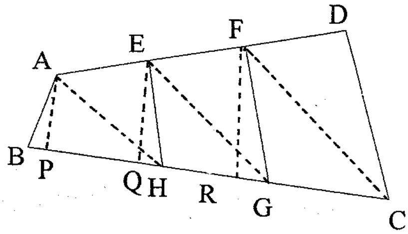
$\because \overline{AP}//\overline{EQ}//\overline{FR}$且$\overline{AE}=\overline{EF}$ $\quad\therefore \overline{PQ}=\overline{QR}$

即$\overline{EQ}$為梯形 APRF 的中線$\Rightarrow 2\overline{EQ}=\overline{AP}+\overline{FR}$

$\Rightarrow 2S_3=S_1+S_5$ ......(9)

同理可証

$2S_4=S_2+S_6$ ......(10)



圖五

(9)+(10)，得

$2(S_3+S_4)=S_1+S_2+S_5+S_6$

$\Rightarrow 3(S_3+S_4)=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6$

$\Rightarrow S_3+S_4=\frac{1}{3}(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6)$

故四邊形EFGH $=\frac{1}{3}\times$四邊形ABCD

第四種証法：

如圖六，連接$\overline{BD}$，取$\overline{BD}$的三等分點P 、 Q；再連接$\overline{PE}$、$\overline{PH}$、$\overline{QF}$、$\overline{QG}$。

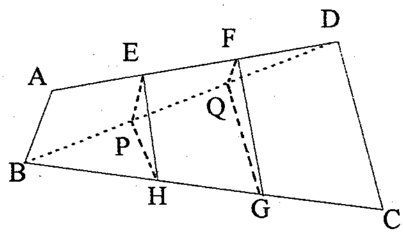
又E 、 F是$\overline{AD}$的三等分點。

$\therefore \Delta DFQ \sim \Delta DEP \sim \Delta DAB$

但$\overline{DF}:\overline{DA}=1:3$，$\overline{DE}:\overline{DA}=2:3$

$\therefore \Delta DEP=(\frac{2}{3})^2\Delta ABD$..............................(11)

$\Delta DFQ=(\frac{1}{3})^2\Delta ABD$..............................(12)



圖六

(11)+(12)，得

四邊形$EFQP=\frac{1}{3}\Delta ABD$..............................(13)

同理可證

四邊形$PHGQ=\frac{1}{3}\Delta BCD$..............................(14)

(13)+(14)，得

多邊形$EFQGHP=\frac{1}{3}\times$四邊ABCD

在ΔDEP中

$\because$ F、Q分別爲$\overline{DE}$、$\overline{DP}$的中點　　$\therefore \overline{FQ}//\overline{EP}$且$\overline{PE}=2\overline{QF}$

同理可證

$\overline{PH}//\overline{QG}$且$\overline{QG}=2\overline{PH}$　　$\Rightarrow \angle EPH=\angle FQG$

設$\angle EPH=\angle FQG=\theta$，則

$$\frac{\Delta PEH}{\Delta QFG}=\frac{\frac{1}{2}\overline{PE}\cdot\overline{PH}\cdot\sin\theta}{\frac{1}{2}\overline{QF}\cdot\overline{QG}\cdot\sin\theta}=\frac{2\overline{QF}\cdot\overline{PH}}{\overline{QF}\cdot 2\overline{PH}}=1$$

即$\Delta PEH=\Delta QFG$

$\Rightarrow$ 多邊形EFQGHP$=\Delta PEH+$多邊形FEHGQ$=\Delta QFG+$多邊形FEHGQ$=$四邊形EFGH

故四邊形 $EFGH=\frac{1}{3}\times$四邊形ABCD

第五種証法：

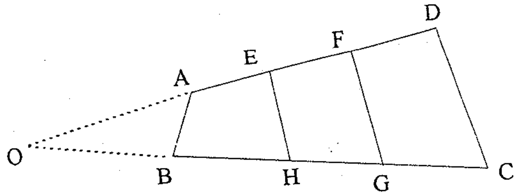
因爲$\overline{AD}\nparallel\overline{BC}$，不妨假設$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BC}$交於O，如圖七，又設$\angle AOB=\theta,\overline{AO}=m,$ $\overline{BO}=n,\overline{AD}=3a,\overline{BC}=3b$，則

$\Delta AOB=\frac{1}{2}mn\cdot\sin\theta$..................................(15)

$\Delta EOH=\frac{1}{2}(a+m)(b+n)\sin\theta$..........................(16)

$\Delta FOG=\frac{1}{2}(2a+m)(2b+n)\sin\theta$......................(17)

$\Delta COD=\frac{1}{2}(3a+m)(3b+n)\sin\theta$......................(18)



圖七

(17)-(16)；得　四邊形EFGH $=\frac{1}{2}(3ab+an+bn)\sin\theta$

(18)-(15)；得　四邊形ABCD $=\frac{3}{2}(3ab+an+bn)\sin\theta$

故四邊形EFGH $=\frac{1}{3}\times$ 四邊形ABCD

第六種証法：

將線段 AEF 沿 $\overline{EH}$ 平移至 $\overline{PQ}$，使 E 落在 H 點上，如圖八。連接 $\overline{BP}$、$\overline{AP}$、$\overline{GQ}$、$\overline{QF}$。

$\because \overline{AE}=\overline{EF}$

$\therefore \square APHE\cong\square EHQF$

$\Rightarrow \overline{HP}=\overline{HQ}$

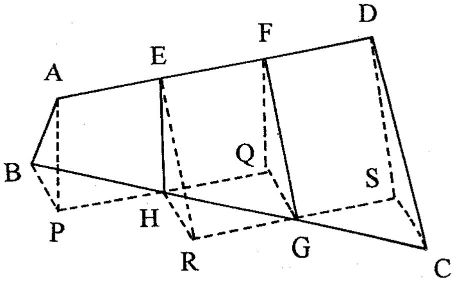
又 $\overline{BH}=\overline{HG}, \angle BHP=\angle QHG$

$\therefore \Delta BHP\cong\Delta GHQ$

$\Rightarrow \overline{BP}=\overline{GQ}$

但 $\overline{AP}=\overline{FQ}, \angle APB=180^\circ-\angle FQG$

$\therefore \Delta ABP=\Delta FQG$



圖八

則四邊形EFGH − 四邊形AEHB

$=(\square HQFE+\Delta HQG+\Delta FQG)-(\square APHE+\Delta ABP-\Delta BHP)=2\Delta HQG$

同理，將線段 EFD 沿 $\overline{FG}$ 平移至 $\overline{RS}$，使 F 落在 G 點。連接 $\overline{ER}$、$\overline{DS}$、$\overline{HR}$、$\overline{SC}$。可得

四邊形FGCD − 四邊形EFGH $=2\Delta HRG=2\Delta HQG$

即四邊形EFGH − 四邊形AEHB = 四邊形FGCD − 四邊形EFGH

故四邊形EFGH $=\frac{1}{3}\times$ 四邊形ABCD

結　語：

從第三或六種証法過程中可推知：四邊形 AEHB 、四邊形 EFGH 和四邊形 FDCG ，三者的面積形成一等差數列。在此，我們將之一般化，作爲本文的結束。

在四邊形 ABCD 中，P_1、P_2、…、P_k、…、P_{n-1}和Q_1、Q_2、…、Q_k、…、Q_{n-1}分別是 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 的 n 等分點。我們可由上述的第三或第六種証法過程中，可得知：

四邊形 AP_1Q_1B、$P_1P_2Q_2Q_1$、…、$P_kP_{k+1}Q_{k+1}Q_k$、…、$P_{n-1}DCQ_{n-1}$ 爲一等差數列。則：

(1)當 n 爲大於 1 的奇數時，四邊形 $P_{\frac{n-1}{2}}P_{\frac{n+1}{2}}Q_{\frac{n+1}{2}}Q_{\frac{n-1}{2}}$ 的面積等於四邊形 ABCD 面積的 $\frac{1}{n}$ 倍。

(2)當 n 爲大於 2 的偶數時，四邊形 $P_{\frac{n}{2}-1}P_{\frac{n}{2}}Q_{\frac{n}{2}}Q_{\frac{n}{2}-1}$ 和四邊形 $P_{\frac{n}{2}}P_{\frac{n}{2}+1}Q_{\frac{n}{2}+1}Q_{\frac{n}{2}}$ 的面積和，等於四邊形 ABCD 面積的 $\frac{2}{n}$ 倍。

參考資料：

1.〔俄〕B.B.波拉索洛夫著，周春荔　張同濟等譯，平面幾何問題集及其解答(第一版)，（長春）東北師範大學出版社，1988。

2.范光中主編，初中數學奧林匹克系列教材（第二冊）（第一版），（西安）陝西師範大學出版社，1944。

3.張新生，補形法解幾何題，中學教研（數學版）1997 年第五期，（金華）浙江師範大學，1997 年 5 月 5 日。

4.費林北等編著，平面幾何解題指導（第一版），（上海）同濟大學出版社，1991。

5.蔣聲編著，初中幾何妙題巧解（第一版），（上海）上海科技教育出版社，1993。

（上接 24 頁）

5.徐文伯（民 71 年）：同行黑白棋子移動問題，數學傳播，6 (4),104，中研院數研所。

6.許宗義（民 69 年）：同行黑白棋子移動問題，同上，4 (2), 121。

7.陳慕群等（民 73 年）：有趣的移位遊戲，第 24 屆中小學科展優勝作品專輯（初小組）；國立臺灣科學教育館出版 p 220 ~ 233。

8.楊博清（民 73 年）：棋子遊戲之研究，科學研習，23 (4), 14。

9.楊鴻榮（民 71 年）：同行黑白棋子移動問題，數學傳播，6 (4), 99，中研院數研所。

10.劉清田（民 70 年）：同行黑白棋子移動問題，同上，5 (4), 99。

11.戴久永（民 70 年）：閒話數形圖的應用，同上，5 (1), 50

12.羅宇延等（民 83 年）：毛毛蟲變蝴蝶－移位遊戲的新發現，第 34 屆中小學科展優勝作品專輯（高小組）；國立臺灣科學教育館出版 p 258 ～ 268。

13.嚴夢輝等（民 82 年）：數學遊戲，國立臺灣科學教育館出版 p 50,114 ～ 115。