樹狀圖的魔力(二)

～一則移位遊戲的探討～

鄭再添

國立臺灣師範大學　附屬中學

三、研究過程

(甲)我們先利用圍棋代替帽子在格子裡移動進行試驗，但因無法記得下過的步驟，從而瞭解到將移動過程記錄下來的重要性。又在試驗的過程中，體驗到『避免重複』是獲得這個遊戲最少次數的最高指導原則，因為只要您某一步移動的結果是在這之前曾經出現過的，則這種下法就不可能是最少次數了！

再考慮將問題數字化：用 1 表示紅帽， 2 表示白帽， 0 則代表空格，而題目即變成－如何 “將 0111222 按規則移動成為 2221110”的排列遊戲了。

有道是：“萬丈高樓平地起”，我們發揮數學上以簡馭繁的精神，先將問題簡化，從二頂帽子（一紅一白）開始考慮，但是這樣的答案太明顯了，只要一步就可以將 012 移動成 210 ，根本不需要樹狀圖，因此再考慮四頂帽子（二紅二白）的情形，它的樹狀圖如《圖一》所示，由起點 01122 開始移動至得到 22110 為遊戲的目標。

在建構樹狀圖時，筆者擬訂了一些規則，使得過程進行地更迅速有效：

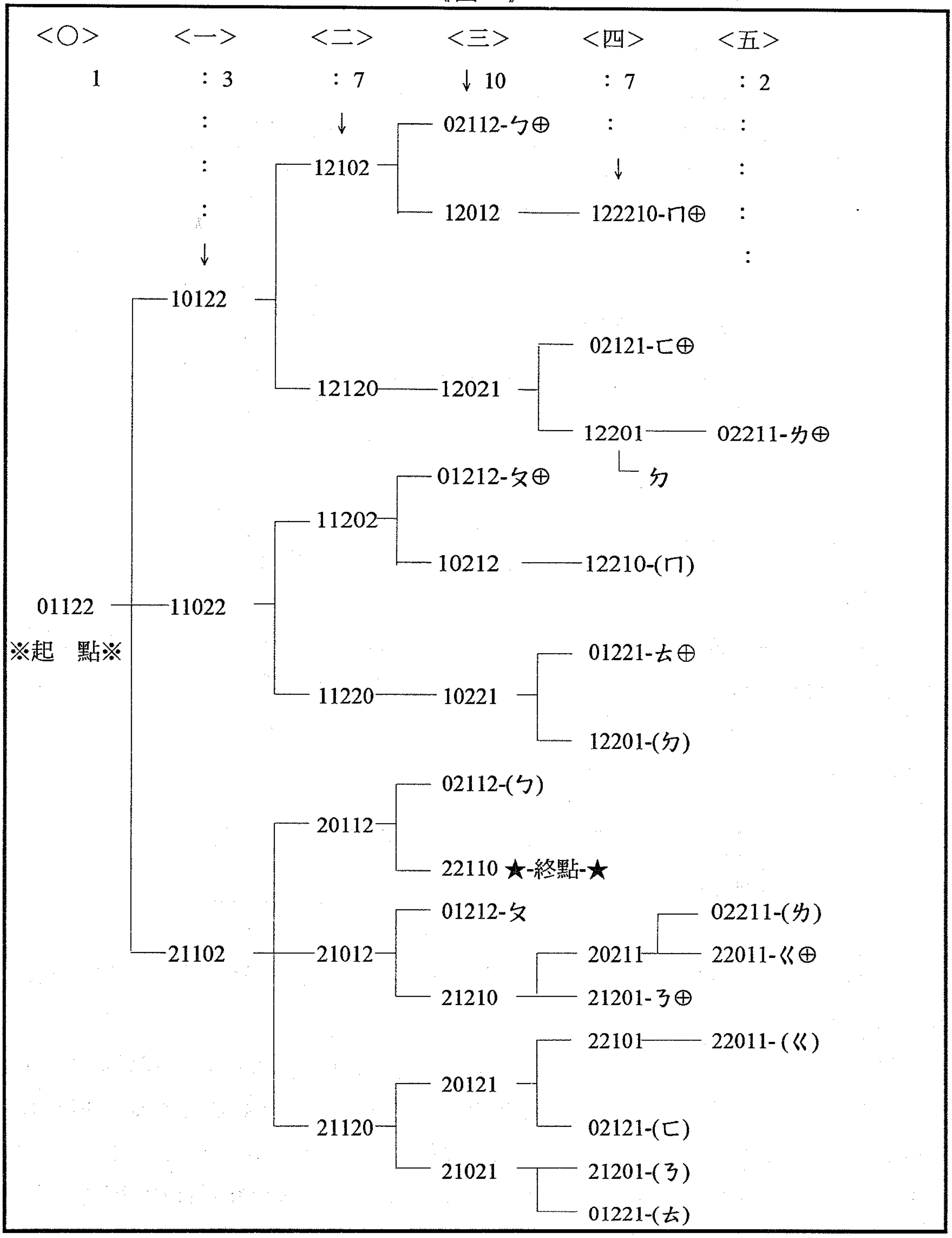
1.有左而右按規則將各種可能的移動方式併排列出。

2.根據『避免重複』的原則，只要是在前面步驟中已經出現過的移動結果就可以提前結束，不必再往下發展樹狀圖，我們便在它的後面畫上“⊕”的記號。以＜三＞中之 02112 為例，依規定所能移動的各種結果 20112 、 12012 、 12102 都已出現過，故後面有“⊕”

3.如果在同一步中有二個以上的移動結果時，我們只選其中一個繼續發展，其餘的則在後面標記符號（如（ㄅ）（ㄆ）・・・）以便區別，這樣可以節省不少的時間和畫圖的空間。以第三步為例，在 02112 第二次出現時標示上”ㄅ”記號。

4.將每一步出現的不同結果個數標記在＜＞的右下角，這樣可以便於檢視。以＜四$>_7$ 為例，表示圖中第四步裡共有 7 個不同的結果出現，而所有的總數是 1+3+7+10+7+2=30

《圖一》


<〇> <一> <二> <三> <四> <五>
1 : 3 : 7 ↓ 10 : 7 : 2
02112-ㄅ⊕
12102
12012
122210-ㄇ⊕
10122
02121-ㄈ⊕
12120
12021
12201
02211-ㄉ⊕
ㄉ
01212-ㄆ⊕
11202
10212
12210-(ㄇ)
01122
※起 點※
11022
01221-ㄊ⊕
11220
10221
12201-(ㄉ)
02112-(ㄅ)
20112
22110 ★-終點-★
01212-ㄆ
02211-(ㄉ)
21102
21012
20211
22011-ㄍ⊕
21210
21201-ㄋ⊕
22101
22011-(ㄍ)
20121
21120
02121-(ㄈ)
21021
21201-(ㄋ)
01221-(ㄊ)

畫圖的時候，可將已出現過的數字按順序另外記錄下來，這樣可以增快檢查每個移動結果是否出現過的速度和正確性。如表(一)：

表(一)

0	1	2
01122 --(〇)	10122 --(一)	20112 --(二)
01212 --(三)	10212 --(三)	20121 --(三)
01221 --(四)	10221 --(三)	20211 --(四)
02112 --(三)	11022 --(一)	21012 --(二)
02121 --(四)	11202 --(二)	21021 --(三)
02211 --(五)	11220 --(三)	21102 --(一)
		21120 --(二)
	12012 --(三)	21201 --(四)
	12021 --(三)	21210 --(三)
	12102 --(二)	
	12120 --(二)	22011 --(五)
	12201 --(四)	22101 --(四)
	12210 --(四)	22110 --(三)
註：括弧內所示數字表示它在《圖一》的第幾步出現		

利用排列組合的觀點來看，將 01122 至 22110 由小到大排列是屬“不完全相異之直線排列”，共應有 5 ！／(2 ！ 2 ！)=30 個，和表(一)的總個數相符，可見它們都恰在《圖一》中出現一次。

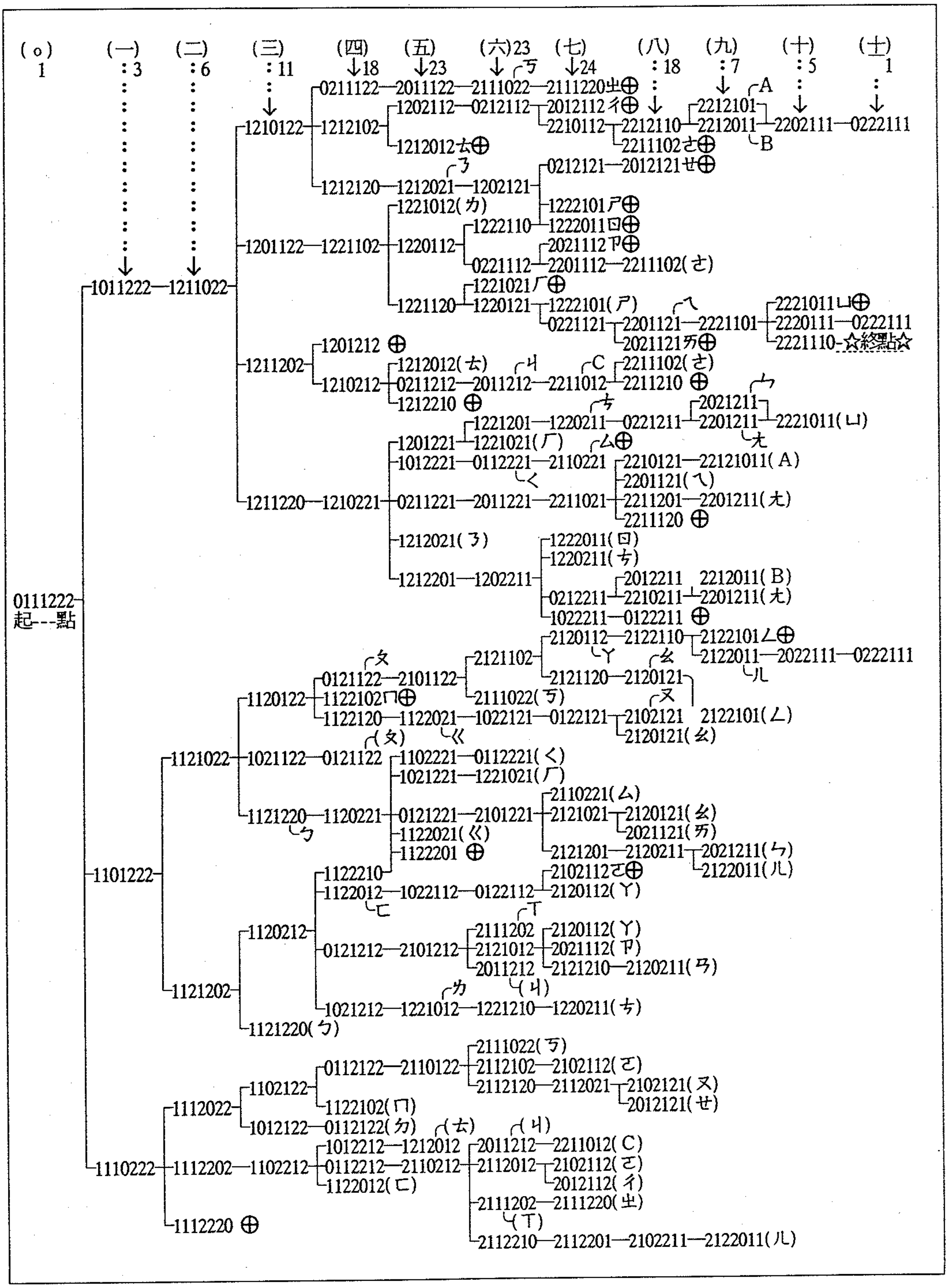
我們從圖一可以明白看出正確的移動方式如下：

01122	→	21102	→	20112	→	22110
(開始)						(完成)

最少步驟的下法只要三步就可以完成，唯有一種下法。處理過程簡單而明瞭，樹狀圖的魔力真令人驚訝！

(乙)從上面的過程裡，我們有了建構樹狀圖的實際經驗，因此再進一步發展六頂帽子（三紅三白）的樹狀圖時，已經能夠得心應手了。下面的《圖二》就是由 0111222 到 2221110 的整個發展過程。畫圖前，我們先把這七位數的數字排列（共 7 ！／（ 3 ！ 3 ！）＝ 140 種由）由小到大列成一個表（參見表二），然後用查表的方式配合樹狀圖往下建構，使工作更省時省力。畫圖的規則如同＜圖一＞部分所述。

《圖　二》


(o) (一) (二) (三) (四) (五) (六)23 (七) (八) (九) (十) (十一)
1 :3 :6 :11 ↓18 ↓23 ↓ ㄎ ↓24 :18 ↓ A :7 :5 1
0211122—2011122—2111022—2111220ㄓ⊕
1202112—0212112—2012112ㄔ⊕ 2212101 A
1210122—1212102—2210112—2212110—2212011—2202111—0222111
1212012ㄊ⊕ 2211102ㄜ⊕ B
ㄋ 0212121—2012121ㄝ⊕
1212120—1212021—1202121
1221012(ㄌ) 1222101ㄕ⊕
1222110—1222011ㄖ⊕
1201122—1221102—1220112 2021112ㄗ⊕
0221112—2201112—2211102(ㄜ)
1011222—1211022 1221021ㄏ⊕
1221120—1220121—1222101(ㄕ) ㄟ 2221011ㄩ⊕
0221121—2201121—2221101—2220111—0222111
2021121ㄞ⊕ 2221110-☆終點☆
1201212 ⊕
1211202 1212012(ㄊ) ㄐ C 2211102(ㄜ)
1210212—0211212—2011212—2211012—2211210 ⊕
1212210 ⊕ ㄘ ㄣ
1221201—1220211—0221211—2021211—2201211—2221011(ㄩ)
1201221—1221021(ㄏ) ㄙ⊕ ㄤ
1012221—0112221—2110221 2210121—22121011(A)
ㄑ 2201121(ㄟ)
1211220—1210221—0211221—2011221—2211021—2211201—2201211(ㄤ)
2211120 ⊕
1212021(ㄋ) 1222011(ㄖ)
1220211(ㄘ)
1212201—1202211 2012211 2212011(B)
0212211—2210211—2201211(ㄤ)
1022211—0122211 ⊕
0111222 起--點
2120112—2122110—2122101ㄥ⊕
ㄆ 2121102 ㄚ ㄠ 2122011—2022111—0222111
0121122—2101122 2121120—2120121 ㄦ
1120122—1122102ㄇ⊕ 2111022(ㄎ) ㄡ
1122120—1122021—1022121—0122121—2102121 2122101(ㄥ)
(ㄆ) ㄍ 2120121(ㄠ)
1121022—1021122—0121122 1102221—0112221(ㄑ)
1021221—1221021(ㄏ)
2110221(ㄙ)
1121220—1120221—0121221—2101221—2121021—2120121(ㄠ)
ㄅ 1122021(ㄍ) 2021121(ㄞ)
1122201 ⊕ 2121201—2120211—2021211(ㄣ)
1101222 1122210 2122011(ㄦ)
2102112ㄛ⊕
1122012—1022112—0122112—2120112(ㄚ)
ㄈ ㄒ
1120212 2111202 2120112(ㄚ)
0121212—2101212—2121012—2021112(ㄗ)
2011212 2121210—2120211(ㄢ)
1121202 ㄌ (ㄐ)
1021212—1221012—1221210—1220211(ㄘ)
1121220(ㄅ)
2111022(ㄎ)
0112122—2110122—2112102—2102112(ㄛ)
1102122 2112120—2112021—2102121(ㄡ)
1122102(ㄇ) 2012121(ㄝ)
1112022 1012122—0112122(ㄌ) (ㄊ) (ㄐ)
1012212—1212012 2011212—2211012(C)
1110222—1112202—1102212—0112212—2110212—2112012—2102112(ㄛ)
1122012(ㄈ) 2012112(ㄔ)
2111202—2111220(ㄓ)
(ㄒ)
1112220 ⊕
2112210—2112201—2102211—2122011(ㄦ)

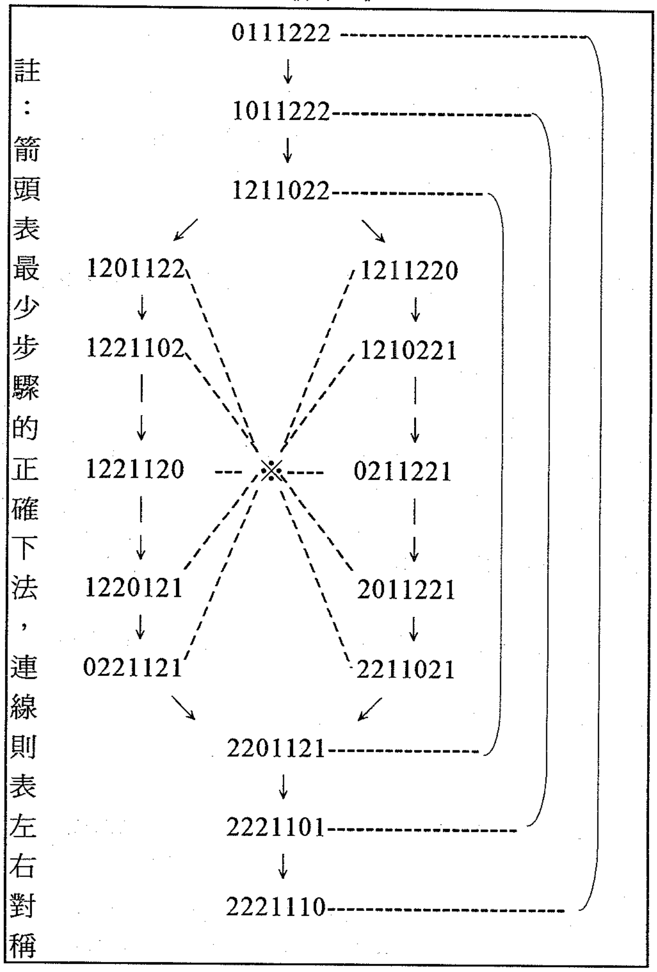
《表二》

0	1		2	
0111222 --(0)	1011222 --(1)	1201122 --(3)	2011122 --(5)	2120112 --(7)
0112122 --(4)	1012122 --(3)	1201212 --(4)	2011212 --(6)	2120121 --(8)
0112212 --(4)	1012212 --(4)	1201221 --(5)	2011212 --(6)	2120211 --(8)
0112221 --(6)	1012221 --(5)	1202112 --(5)	2012112 --(7)	2121012 --(6)
		1202121 --(6)	2012121 --(8)	2121021 --(7)
0121122 --(4)	1021122 --(3)	1202211 --(6)	2012211 --(8)	2121102 --(6)
0121212 --(4)	1021212 --(4)			2121120 --(7)
0121221 --(5)	1021221 --(5)	1210122 --(3)	2021112 --(7)	2121201 --(7)
0122112 --(6)	1022112 --(6)	1210212 --(4)	2021121 --(8)	2121210 --(7)
0122121 --(7)	1022121 --(7)	1210221 --(4)	2021211 --(9)	2122011 --(9)
0122211 --(8)	1022211 --(8)	1211022 --(2)	2022111 --(10)	2122101 --(9)
		1211202 --(3)		2122110 --(8)
0211122 --(4)	1101222 --(1)	1211220 --(3)	2101122 --(5)	
0211212 --(5)	1102122 --(3)	1212012 --(5)	2101212 --(5)	2201112 --(7)
0211221 --(5)	1102212 --(3)	1212021 --(5)	2101221 --(6)	2201121 --(8)
0212112 --(6)	1102221 --(5)	1212102 --(4)	2102112 --(7)	2201211 --(9)
0212121 --(7)		1212120 --(4)	2102121 --(8)	2202111 --(10)
0212211 --(7)	1110222 --(1)	1212201 --(5)	2102211 --(8)	
	1112022 --(2)	1212210 --(5)		2210112 --(7)
0221112 --(6)	1112202 --(2)		2110122 --(5)	2210121 --(8)
0221121 --(7)	1112220 --(2)	1220112 --(5)	2110212 --(5)	2210211 --(8)
0221211 --(8)		1220121 --(6)	2110221 --(7)	2211012 --(7)
0222111 --(11)	1120122 --(3)	1220211 --(7)	2111022 --(6)	2211021 --(7)
	1120212 --(3)	1221012 --(5)	2111202 --(6)	2211102 --(8)
	1120221 --(4)	1221021 --(6)	2111220 --(7)	2211120 --(8)
	1121022 --(2)	1221102 --(4)	2112012 --(6)	2211201 --(8)
	1121202 --(2)	1221120 --(5)	2112021 --(7)	2211210 --(8)
	1121220 --(3)	1221201 --(6)	2112102 --(6)	2212011 --(9)
	1122012 --(4)	1221210 --(6)	2112120 --(6)	2212101 --(9)
	1122021 --(5)	1222011 --(7)	2112201 --(7)	2212110 --(8)
	1122102 --(4)	1222101 --(7)	2112210 --(6)	
	1122120 --(4)	1222110 --(6)		2220111 --(10)
	1122201 --(5)			2221011 --(10)
	1122210 --(4)			2221101 --(9)
				2221110 --(10)
小計　20	30	30	28	32

附註：本表按數的大小排列，爲方便作業，以第一位概分三欄，再用前三位分類做區隔。

由上文之《圖二》可以知道：原問題的最少次數確實爲十次。換句話說，沒有人能在少於十次內下出結果來；而十次的下法共有兩種，如下圖所示：

《圖三》



仔細比較這兩種下法的異同，發現如各虛線所示相當有趣的對稱現象。上下對稱是因爲:我們怎麼由 0111222 下成 2221110，就可以用顛倒步驟將 2221110 下成 0111222 ；中間幾步沒有上下對稱，但兩種同爲十次的下法呈左右對稱，這個情形提供我們瞭解“爲什麼會有兩種下法”一個極爲合理的解釋。

若試著改變遊戲的目標來比較它們的趣味性，可以發現：

以 2221110 爲目標遠比 0222111 來得合理，因爲 0222111 有太多種下法可以在十一次移動下完成，而 2220111 則和 2221110 不相上下；較特別的目標還有——

0212121 和 2121210 同樣在七次移動下可以完成，但是 2121210 只有一種下法，比

起 0212121 的兩種下法略勝一籌；再簡單些則有 1212120 和 0121212，它們同樣是在四次移動下恰有一種下法可以完成，真可謂“平分秋色”。

(丙)用《圖二》的畫樹狀圖方法來瞭解問題，工作已經變得辛苦了。我們希望能夠有進一步的原則被發現，可以使用某種特別的推論方式來探討問題，有效地節省時間和精力。很幸運地，我們在回顧解析《圖二》的建構過程中，領悟出【大步向前－保持暢通】的原則，大簡化了建構樹狀圖的過程，是令人興奮的重大發現！它對問題的進一步探討有很大幫助：

> **【大步向前－保持暢通】原則**
>
> 除了第一步及最後一步以外，應始終保持“1 向右、2 向左”勇往直前方式進行；每一步都以最大進幅爲優先選擇，但在會造成“塞車”（當下一步移動會被迫違反“1 向右、2 向左”的方式時，即造成塞車）結果時即應退而求其次，這樣可以保持暢通，達到「避免重複」的效用；當左右前進幅度相同時，則考慮同時並列往下進行。

利用這個原則可將《圖二》簡化成下列面貌——

```
                                  ┌ 1211220 – 1210221 – 0211221 – 2011221 – 2211021 – 2201121┬ 2221101 – 2221110-☆終點☆
(起-點)                            │                       ┌ 0221112 – 2201112-⊕            │
0111222 – 1011222 – 1211022 ─┤             ┌ 1220112┴ 1222110 – 1222011-⊕            │
                                  └ 1201122 – 1221102┼ 1221120 – 1220121 – 0221121 – 2201121┘
                                                     └ 1221012 – 1221210 – 1220211 – 0221211 – 2201211 – 2221011 – 2221110
```

如果再配合利用(乙)中的對稱現象來進行，則最少次數的兩種下法將很“理所當然”的出現在眼前，結果相當迅速確實——

```
掌  →                                   ┌1211220—1210221—0211221 ─┐  ★
握  0111222—1011222—1211022┴1201122—1221102—1221120 ┐ │  齊
原                                                          │ │  頭
則  2221110—2221101—2201121┬0221121—1220121—1221120 ┘ │  並
★  →                                   └2211021—2011221—0211221 ─┘  進
```

(丁)利用改良後的建構方法，我們又完成了一些經改變遊戲規則後所得的樹狀圖。若將規則改成“最多僅能越過一頂帽子”，則最少需十五步：

```
→
                                     ┌1121220 ⊕┌ 1021122 ⊕
0111222—1101222—1121022┤1120122——┘  1122102              ┌0121212—2101212—2121012
                                     └1121202—— 1120212 —1021212┤1201212┬0211212 ⊕ ：雙
                                                                 ………. └1221012 ⊕ ：方
                                                                                  ：碰
2221110—2221011—2201211┬2210211                                                  ：頭
→                      └2021211—2120211—2121201┬2121210—2121012----------┘
                                                └2121021 ⊕
```

若將規則改成“可超越三頂”，則只需五步就可以了：

```
→
0111222 – 2111022 – 2011122 – 2211102
                                   :
0222110 – 2201112 – 2211102--------┘
→
```

事實上，可超越三項以上時，需要的步數也無法再進一步減少了！

最多僅能越過一頂帽子時，最少需十五步；可超越三頂，則只需五步就可以了。五、十、十五剛好分別是 5 的 1 、 2 、 3 倍，是否有特別的秘密隱藏其中？目前仍不清楚，留待日後繼續探討。

另外，我們也對不同棋數間的差異做了探討；它們的樹狀圖不準備在這裡呈現，只將結果列一簡表如下：（格內數字表其最少次數）

可越過帽子數		1	2	3	4	5 個以上
棋子數	二黑二白	8	3	3	3	3
	三黑三白	15	10	5	5	5
	四黑四白	26	16	12	7	7

這些結果看來，都沒有如[4]所得最少移動次數是等差的現象，也沒有明顯的規律產生，多少有些失望，只好留待日後再求突破。

四、結論與展望

綜合上面的研究心得，將主要結論大致整理如下：

1.由『避免重複』的最高指導原則下建構出來的樹狀圖可以確實地提供我們知道本遊戲所需的最少移動次數，同時可以看出共有幾種可能下法。
2.根據樹狀圖的解讀，可以設法改變遊戲的目標，以提高遊戲的耐玩度，也可以由數字排列表比較不同的目標間的最少移動次數及可能下法的多少，用來評價不同目標間的難易度及適切性。
3.最少移動次數的可能下法具有相當好的對稱現象。
4.運用【大步向前－保持暢通】原則，可以大幅簡化建構樹狀圖的過程；再配合利用對稱現象，掌握原則齊頭並進，使過程更迅速確實。
5.改變規則只許超越一頂時，需十五次；允許三頂以上時，最少需五次，無法再少。對不同帽子數所需最少移動次數之間觀察，則未發現明顯的規律。

此處所討論的樹狀圖，不是指圖形學裡經嚴格定義的那種，而是一般在機率裡學到的分析圖表。樹狀圖的運用之妙，存乎一心。當問題發展的可能情況越多時，圖的分枝越繁茂，常會一下子就變得很龐大；進一步掌握某些原則加以去蕪存菁是絕對必要的，否則很容易會不堪負荷。現今電腦日益發達，利用電腦探索數學也已成必然的新趨勢；如果設法運用某些軟體執行分析，探索的工作一定更具成效。希望有識之士能多多賜教，共同來研討。

離散數學領域裡的問題，解題規律較不明確，難易度的感受也很難辨明。但它們與生活結合，趣味性又高，如果能想得巧、用的妙，在數學教育上必定會很受歡迎的。筆者帶領孩子走過本問題的探討，自己也收穫很大，故而不揣淺陋在此提出報告，希望能供中學師生們在教學上作參考，並請方家學者不吝斧正。

五、參考文獻

1.王中烈（民 71 年）：同行黑白棋子移動問題，數學傳播，6 (3),105，中研院數研所。
2.王中烈（民 72 年）：同行黑白棋子移動問題，同上，7 (1), 80。
3.王芳夫、王登傳（民 70 年）：數學遊戲大觀第二輯；前程出版社 p 146、332。
4.林祁堂（民 83 年）：高中數理資優班專題研究課程設計及教學方式探討，資優教育季刊第 51 期；國立臺灣師範大學特殊教育中心出版 p 23～28。
（下轉 15 頁）