『一路領先』之公式及一些應用

陳清風
省立桃園高級中學

一、前　言：

現行高中數學教材第四冊，有三分之二的份量是介紹排列組合及機率。筆者每教授此單元時，均會有幾位同學提出有關『一路領先』之類問題，因此類題目有其技巧性，對一般中學生而言不易解出（或許也因此原因，所以在課本中並未提及），願在此提出一般性解法並歸納出公式。希望此文對有興趣的中學生能有些助益，但因筆者學識有限疏漏與不智處期盼諸位先進予以指正。

二、本　文：

問題一：設甲，乙兩人競選班代表共獲 13 張票，若開票時甲一直保持領先，而最後以 3 票之多獲勝，則唱票的情形有幾種？

〔解〕 (1)顯然最後甲得 8 票，乙得 5 票，而開票過程中

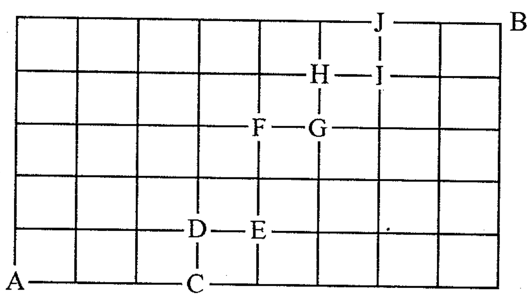
例如：甲甲乙甲乙甲乙甲乙甲乙甲甲爲合理的一種，但

甲乙甲甲甲乙乙甲甲乙乙甲甲爲不合理的一種。

（因唱第三張票前，甲乙兩人票數相等）

∴甲必先得前二票，方能一路領先。

(2)∵所有唱票情形＝ 8 個甲和 5 個乙之直線排列數＝ $\frac{(8+5)!}{8!5!}$



（∵甲得 8 票，乙得 5 票∴棋盤街道必是 9 豎 6 橫）

因此若令甲得一票則向右走一格，乙得一票則向上走一格則每一種唱票情形都可轉化爲 9 豎 6 橫之棋盤街道的捷徑走法。

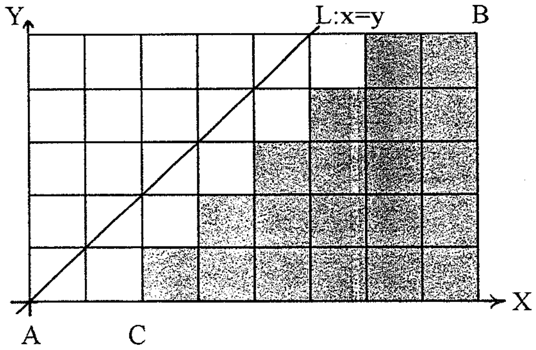
例如：甲甲甲乙甲乙乙甲乙甲乙甲甲就可轉化成

路徑 A → C → D → E → F → G → H → I → J → B

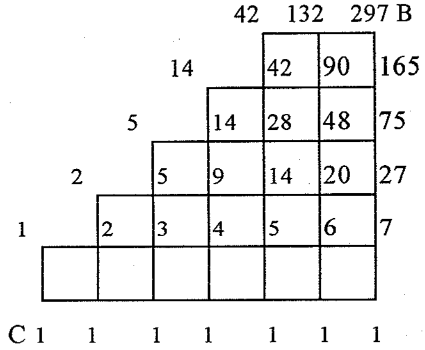
(3)將棋盤放在坐標平面的第一象限及兩軸的正向上

∵甲要一路領先乙

∴其路徑必須在 X > Y 的區域內，即斜線區域內。



⇒



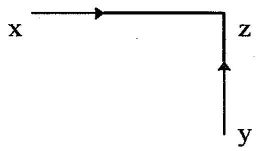
（圖上的數字表示到該點的走法）

故所求之情形＝由 C 至 B 之梯形街道之捷徑走法

＝ 297 種(why?)

〔說明〕1.加法原理：

如右圖(一)，若走到 x 點有 n 種方法，走到 y 點有 m 種方法則走到 z 點有（ n ＋ m ）種方法。



（圖一）

2.如右圖(二)，利用加法原理可知：

C → D 有 1 ＋ 1 ＝ 2 法

C → E 有 2 ＋ 1 ＝ 3 法

C → F 有 3 ＋ 1 ＝ 4 法

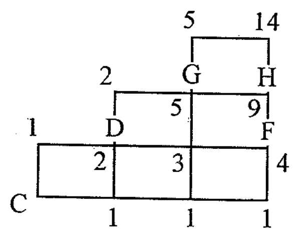
C → G 有 2 ＋ 3 ＝ 5 法

C → H 有 4 ＋ 5 ＝ 9 法

………

………

C → B 有 132 ＋ 165 ＝ 297 法



（圖上的數字表示該點的走法）

圖（二）

〔註〕此法固然能解出這問題，但若要找出公式來，就必須克服一般化的梯形街道捷徑走法之求法。

問題二：如下圖，求由 C 到 B 之梯形街道之捷徑走法有幾種？

〔解〕(1)所求＝（ C 到 B 之棋盤街道捷徑走法）－（ C 至 B 之越區捷徑走法）

其中〔越區〕是指路徑中有超越斜線區域之情形。

(2)如下圖，若以直線 L 爲對稱軸，將 C 對應到 C'，

則 C → B 任一越區之捷徑路線必恰與 C'→ B 之捷徑路線一對一對應。

理由如下：

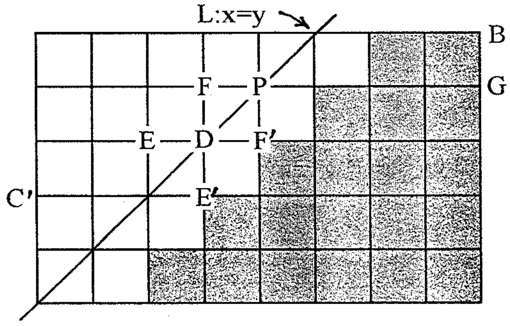
因爲 C → B 任一越區之捷徑路線必與對稱軸 L 至少有一交點。

令最後一個離開 L 的交點爲 P，則以 $\overline{AP}$ 爲對角線所形成的正方形內，越區之路線對直線 L 作對稱路線，而 P 到 B 的路線不變，如此則 C → B 任一越區之捷徑路線必恰與 C'→ B 之捷徑路線一對一對應。

例如：越區路線 C → E → D → F → P → G → B

其對應路線爲 C'→ E'→ D → F'→ P → G → B

故：（ C → B 之越區捷徑走法）＝（ C'→ B 之捷徑走法）



故：所求＝（ C → B 之棋盤街道捷徑走法）－（ C → B 之越區捷徑走法）

＝（ C → B 之棋盤街道捷徑走法）－（ C'→ B 之捷徑走法）

$$=\frac{(6+5)!}{6!5!}-\frac{(8+3)!}{8!3!}=C_5^{11}-C_3^{11}=C_5^{8+5-2}-C_{5-2}^{8+5-2}=297$$

〔註〕由上之解法，我們不難可以歸納出以下之公式。

設總票數爲（ i ＋ j ）票，甲得 i 票，乙得 j 票，唱票時甲一路領先乙的情形有 a(i,j)種，其中 $i > j \geq 2$

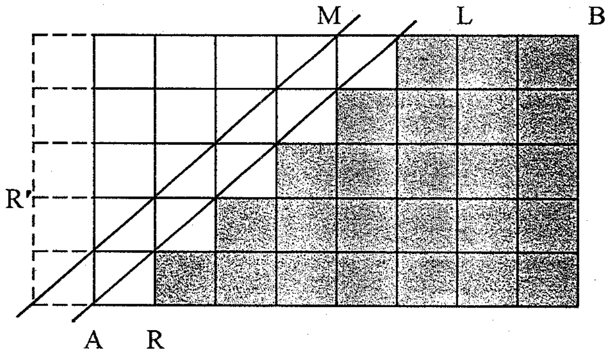
則 $a(i,j)=C_j^{i+j-2}-C_{j-2}^{i+j-2}$

特例(1)當 $j=1$ 時$\Rightarrow a(i,j)=a(i,1)=C_1^{i-1}$

(2)當 $j=0$ 時$\Rightarrow a(i,j)=a(i,0)=1$

問題三：同問題一，但唱票之情形改爲甲不輸給乙（即包含甲＝乙）

〔解〕解法同問題二，如下圖，以 M 爲對稱軸，將 R 對應到 R'（因唱票時甲必先得第一票才可以不輸給乙）



所求＝（ R → B 之捷徑走法）－（ R'→ B 之捷徑走法）

$$=\frac{(7+5)!}{7!5!}-\frac{(9+3)!}{9!3!}=C_5^{12}-C_3^{12}=C_5^{8+5-1}-C_{5-2}^{8+5-1}=572$$

〔註〕由以上之解法，我們不難歸納出以下公式。

設總票數爲（ $i+j$ ）票，甲得 i 票，乙得 j 票，唱票時甲不輸給乙（即包含甲＝乙）的情形有 $b(i,j)$種，其中 $i\geq j\geq 2$

則 $b(i,j)=C_j^{i+j-1}-C_{j-2}^{i+j-1}$

特例(1)當 $j=1$ 時$\Rightarrow b(i,j)=b(i,1)=C_1^i=i$

(2)當 $j=0$ 時$\Rightarrow b(i,j)=b(i,0)=1$

三、應　用：

例一：若一袋中有 6 白球， 5 黑球，每次取一球，取後不放回，直到取完爲止，則取球過程中白球數恆大於黑球數之機率爲？

〔解〕 $P=\dfrac{a(6,5)}{\frac{11!}{6!5!}}=\dfrac{C_5^9-C_3^9}{462}=\dfrac{1}{11}$

例二：設有 20 個人排隊買票，票價 50 元，每人買一張票。但此 20 人中，有 12 人身上只帶 50 元鈔票，其餘 8 人只帶 100 元鈔票。若售票員未準備零錢，則沒有發生找錢困難的機率爲何？

〔解〕 $P=\dfrac{b(12,8)}{\dfrac{20!}{12!8!}}=\dfrac{C_8^{19}-C_6^{19}}{\dfrac{20!}{12!8!}}=\dfrac{5}{13}$

例三：設有一遊戲每玩一次需付 10 元，若規定：玩者獲勝時可再玩二次，失敗則否，又每一次玩者獲勝之機率為 p，失敗之機率為 q，其中 p + q = 1。今某人有 10 元欲玩此遊戲，求其恰玩 13 次之機率為何？

〔解〕若要恰玩 13 次就必須前 11 次中 6 勝 5 負且過程中

（獲勝的次數）≥（失敗的次數）再加上最後兩次失敗才可。

又因前 11 次有 b(6,5)種情形且每一種之機率均為 p^6q^5

$\therefore$所求＝ $b(6,5)\,p^6q^5 * q^2=(C_5^{10}-C_3^{10})p^6q^7=132p^6q^7$

〔說明〕

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
勝	勝	勝	勝	勝	勝	負	負	負	負	負	負	負

恰玩 13 次的條件：

(1)第 13 次須負(2)第 12 也須負(3)玩完第 11 次時還有 2 次機會(4)前 11 次中 6 勝 5 負且過程中（獲勝的次數）≥（失敗的次數）

理由如下：設前 11 次中勝 x 次負 y 次

$$\begin{cases}x+y=11\\(x+1)-y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=11\\x-y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=5\end{cases}$$

$\therefore$前 11 次中 6 勝 5 負

四、參考資料：

1.高中基礎數學第四冊(1994)，國立編譯館。

八十六學年度全國化學能力決賽成績揭曉

臺師大化學系

八十六學年度全國化學能力競賽決賽，元月 5-9 日在臺師大化學系舉行。來自各區複賽的高手共 40 位同學參賽。前二等獎獲得進入 4 月 21 日至 5 月 8 日在臺師大化學系舉行的第 30 屆國際化學奧林匹亞選拔營的資格。名單如下：一等獎：陳建宇（建中），陳劲吉（建中），施怡倫（實驗高中）。二等獎：楊琇婷（南女），王順源（鳳新），郭佑民（中一中），李逸祺（南一中），鄭彥文（武陵），張碧娟（雄女），陳志昌（板中），藍聖閔（雄中）。