中學數學挑戰徵答題參考解答評析

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 2011

若 v_1，v_2，$\cdots$，v_{1997} 爲一組平面向量，且每一個向量 v_i 之長度 $|v_i| \le \sqrt{2}$，$i = 1,2,\cdots,1997$，試證可找到一組實數 a_1，a_2，$\cdots$，a_{1997}，其中每個 $a_i = 1$或-1，$i = 1,2,\cdots,1997$，使得 $\left|\sum_{i=1}^{1997} a_i v_i\right| \le 2$。

解答：我們將更進一步的證明當用 n 代替 1997 時，此命題依然成立。

我們用數學歸納法證明之，

(1)當 $k = 1$時，本命題顯然成立。

(2)當 $k = 2$ 時，因

$$|v_1 + v_2|^2 + |-v_1 + v_2|^2 + |v_1 - v_2|^2 + |-v_1 - v_2|^2 = 4(|v_1|^2 + |v_2|^2) \le 4 \times 4 = 16 \cdots\cdots(1)$$

由(1)式知，(1)的左式四項中必有一項的值≤ 4，

所以必存在一組 $a_1 = \pm 1$，$a_2 = \pm 1$，使得$|a_1 v_1 + a_2 v_2|^2 \le 4$，即$|a_1 v_1 + a_2 v_2| \le 2$

本命題成立。

現假設命題對 $k = n-1$時成立（$n \ge 3$）。

因爲自原點引出的 6 個向量 $\pm v_1$，$\pm v_2$，$\pm v_3$將360°分成 6 份

且其中至少有 1 份$\le 60^\circ$，所以夾角$\le 60^\circ$之兩向量的差之長度$\le \sqrt{2}$，

所以在向量 v_1，v_2，v_3中總可以找到一對 v_i，v_j及a_j使得$|v_i + a_j v_j| \le \sqrt{2}$，

在不失一般性下，我們可設 $|v_1 + v_2| \le \sqrt{2}$，今考慮 $n-1$ 個向量 $v_1 + v_2$，v_3，v_4，$\cdots$，v_n，由歸納法假設知存在 a_3，a_4，$\cdots$，$a_n \in \{1,-1\}$ 使得 $|v_1 + v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n| \le 2$，取 $a_1 = a_2 = 1$，可取 $a_j = 1$或-1，$j = 3,\cdots,n$，使$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right| \le 2$，所以當 $k = n$時本命題亦成立。

故由數學歸納法得證此命題。而本題是$n = 1997$之特例，所以亦必成立。

《解題重點》

1.本題對任意自然數 n 皆成立。

2.以數學歸納法證明。

3.由$|v_1 + v_2|^2 + |-v_1 + v_2|^2 + |v_1 - v_2|^2 + |-v_1 - v_2|^2 \le 16$及由平均值概念知，四個向量中必有一個長度平方$\le 4$。

《評析》

1.本題配合向量幾何題材設計，比原預期之難度超越很多，屬新題型及國內高中生對向量技巧之處理較生疏，參與徵答人數不如預期的多，僅有北一女曾于容等 16 人，得分率僅 0.63 爲五道題中最低者。

2.本題參與徵答同學雖大部分能證明 $n=2,3$ 成立，然不能有效利用數學歸納法完整證明，普遍得分不高，殊爲可惜。

3.在（ 2 ） $k=2$ 時之解法採用平均值之基本概念，其技術很特別，將可應用於第 205 期之第 2018 題。

4.本題解題品質較佳的學生計有建中李國禎，北一女曾于容、葉書蘋及官怡君等 4 人。

問題編號 2012	試確定所有質數 p ，使得下列方程組 $\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2 \end{cases}$ 有整數解 x ， y 。

解答：（採自建中陳明揚之解法。）

僅須考慮 x ， y 都是正整數的情況。

$\because 2 \mid (p+1)$ ，$\therefore p$ 是奇數， $p \neq 2$

由方程組可得 $p(p-1)=2(y+x)(y-x)$ ，

$\therefore p \mid (y+x)$，或 $p \mid (y-x)$

又 $x=1$，$p=1$ 不合

$y=1$，$p=1$ 不合，

$\therefore x$，$y \geq 2$ ，$\therefore x<2x^2-1=p$ ， $y^2<2y^2-1=p^2$ ，$\therefore y<p$

$\therefore 2p>x+y>y-x$

故 $p \mid (y+x) \Rightarrow p=x+y$ ； $p \mid (y-x) \Rightarrow p=y-x$

$\because p>p-1$，若 $p=y-x \quad p-1=2y+2x$

$y-x>2y+2x$ 　產生矛盾

$\therefore p=x+y$，$\therefore y=p-x$

$\therefore p^2+1=2p^2+2x^2-4px$

$\therefore$ 再由 $p+1=2x^2$，得 $p=4px-p^2$

$\therefore 1=4x-p$，$\therefore p+1=4x=4x^2$

$\therefore x=2$，$\therefore p=7$，$y=5$

綜合以上可知， $p=7$ 是唯一符合題意的質數

且 $(x,y)=(2,5),(-2,5),(2,-5),(-2,-5)$ 均是方程組的整數解。

《解題重點》

1. $p=2$ 方程式無整數解。

2.先整理方程組得 $p(p-1)=2(y+x)(y-x)$ ，再就 $p \mid y+x$ 或 $p \mid y-x$ 分別討論之。

3.質數的性質。

《評析》

1.本題配合數論之代數題材設計，原預估難度略高，參與徵答人數亦僅有建中陳明揚等 16 人（含鳳山國中朱浩瑋）惟得分率 0.68 ，略優於第 2011 題。

2.參與徵答者多能求出 $p=7$ 是唯一的解，所不同的是解法上有些微之差異，文字解釋品質不一。

3.鳳山國中朱浩瑋從直角三角形觀點解題，另有一番奇趣。

4.本題解題品質較佳的學生計有建中陳明揚、李國禎，北一女曾于容、葉書蘋，雄中林家平及鳳山國中朱浩瑋等 6 人。

問題編號 2013

設 f 爲定義於正實數的實數值函數，

試確定滿足下列兩條件的所有函數 f ：

(i) $f(xy)=f(x)f(\frac{3}{y})+f(y)f(\frac{3}{x})$ ，對任意正實數 x ， y 均成立；

(ii) $f(1)=\frac{1}{2}$ 。

解答：（ 1 ）當 $x=y=1$ 時，由(i)得 $f(|1|)=f(1)\cdot f(\frac{3}{1})+f(1)\cdot f(\frac{3}{1})=2f(1)f(3)$

又由(ii)得 $f(3)=\frac{1}{2}$ 。

（ 2 ）取 x 爲任意正數， $y=1$ ，再由(i)得

$$f(x)=f(x\cdot 1)=f(x)f(\frac{3}{1})+f(1)f(\frac{3}{x})=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(\frac{3}{x})$$

即得 $f(x)=f(\frac{3}{x})$ ，對任意正數 x 均成立。

（ 3 ）任意正數 x 與 $y=\frac{3}{x}$ ，再由(i)得

$$f(x\cdot\frac{3}{x})=f(x)\cdot f(x)+f(\frac{3}{x})f(\frac{3}{x})=(f(x))^2+(f(x))^2$$

所以 $f(3)=2(f(x))^2$ ，即 $(f(x))^2=\frac{1}{4}$ 。因此，任意正數 x ，

$f(x)=f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})=f(\sqrt{x})\cdot f(\frac{3}{\sqrt{x}})+f(\sqrt{x})\cdot f(\frac{3}{\sqrt{x}})=2(f(\sqrt{x}))^2=\frac{1}{2}$ 也就是滿

足條件的函數f是一個常數函數$f(x)=\frac{1}{2}$。

（4）反之當$f(x)=\frac{1}{2}$，對任意正數x時則$f(x)$顯然滿足題設(i)與(ii)

因此$f(x)=\frac{1}{2}$爲唯一滿足(i)、(ii)的函數。

《解題重點》

1.取特例$x=y=1$，先求得$f(3)=\frac{1}{2}$，再得到$f(x)=f(\frac{3}{x})$的特性。

2.取$y=\frac{3}{x}$，再由(i)得$(f(x))^2=\frac{1}{4}$的特性，再推論得$f(x)=\frac{1}{2}$。

《評析》

1.本題配合函數方程之代數題材設計，原預估爲較難題，惟本次五道題中參與本題徵答者最多，計有武陵高中游志強等 27 人，得分率 0.79 ，比第 2011 及 2012 兩題都高些。

2.本題原先公布於科教月刊第 204 期的第(ii)個條件"$f(1)=\frac{1}{2}$"誤刊成"$f(1)=2$"，果如此，則本題無解，即沒有這樣的函數；建中陳明揚最先發現原刊登的"$f(1)=2$"之錯誤，隨即提出與函數意義矛盾之結論，本刊獲知後即時在網路及信函通知更正；將來遇到這樣的問題仍可作答，僅須解釋清楚"沒有滿足這兩個條件的函數"。

3.函數方程是數學競賽的重要題材，本題最多人徵答，顯示我國中學生之代數基礎甚佳，有利於未來準備參與國際數學競試活動。

4.本題解題品質較佳的學生計有建中陳明揚，台師大附中林建位、王世豪，武陵高中王嘉慶、卜文強、陳志榕、楊葉薰，雄中廖英傑、姜宜榮等 9 人。

問題編號 2014

某兩人熟識，我們就稱此二人爲一對朋友。今有一群人，計n位（$n\geq 3$），已知其中任意三人都至少有一對不是朋友，

試證此n個人中，"朋友總對數"$\leq\left[\frac{n^2}{4}\right]$。

解答：設A是這一群人中朋友最多的一位，d是A的"朋友人數"。某人p之"朋友數"記作$d(p)$，今n個人中，A的朋友集設爲$F=\{A_1,A_2,\cdots,A_d\}$，不是A的朋友集設爲$G=\{B_1,B_2,\cdots,B_{n-d-1}\}$，因任三人中至少有一對不是朋友，故$F$中任二人$A_i$與$A_j$都不是朋友，僅可能與$G$之某些$B_k$爲朋友，於是$n$人中"朋友的總對數$S$"滿足

$$S\leq d(A)+d(B_1)+d(B_2)+\cdots+d(B_{n-d-1})$$
$$\leq d+d(n-d-1)$$

$$=(n-d)d$$
$$\le\left(\frac{(n-d)+d}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}$$ （算幾不等式）

由於 S 爲整數，故 $S\le\left[\frac{n^2}{4}\right]$。

《解題重點》

1.找出朋友最多的那個人（設爲 A ）爲討論的主軸。

2.將全部人分兩類： A 的朋友歸爲一類 F ，不是 A 的朋友歸成另一類 G ，且 F 中任二人都不是朋友。

3.算幾不等式。

《評析》

1.本題配合組合數學（圖論基本概念）題材設計，爲一般定理之特例，難度適中，參與徵答者計有建中楊益昇等 16 人（含鳳山國中朱浩瑋），得分率 0.82 ，爲本次五道題中較高者。

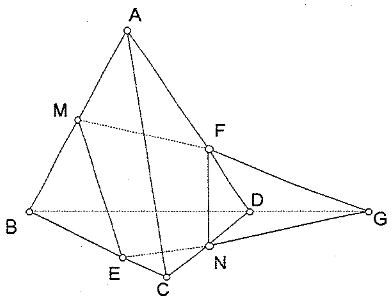
2.一般學生多由數學歸納法著手；台師大附中林建位採用兩種解法，顯示其具備圖論之基本知識；鳳山國中朱浩瑋則採用反證法處理，具創意，值得培養。

3.本題解題較佳的學生計有建中李國禎、蔡旭程，北一女葉書蘋，台師大附中林建位、王世豪及鳳山國中朱浩瑋等 6 人。

問題編號 2015

四面體 $ABCD$ 中，兩對稜 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 的中點分別爲 M ，N ，證明：任一包含直線 MN 的平面將四面體 $ABCD$ 的體積平分。

解答：（ 1 ）可設包含直線 MN 的平面交 $\overline{BC}$ 稜於 E ，則 C 與 D 到平面 MNE 的距離必相等。



（ 2 ）設平面 MNE 交 $\overline{BD}$ 稜、 $\overline{AD}$ 稜於 G 、 F ，則四角錐 $C\text{-}MENF$ 的體積與四角錐 $D\text{-}MENF$ 相等（同底等高）。

（ 3 ）由（ 2 ）的結果知，欲證明平面 MNE 平分四面體 $ABCD$ 的體積時，必須證明四面體 $CAMF$ 與四面體 $DBME$ 的體積相等，證明如下：

設四面體 $ABCD$ 體積爲 V ，

(i)四面體 $CAMF$ 的體積 $=\dfrac{\overline{AM}\times\overline{AF}}{\overline{AB}\times\overline{AD}}V=\dfrac{1}{2}\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AD}}V$

同理 $DBME$ 的體積 $=\frac{1}{2}\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}V$

(ii)由孟氏定理得 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}}\times\frac{\overline{DG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}=1$，且 $\frac{\overline{CN}}{\overline{ND}}\times\frac{\overline{DG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=1$

所以 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$，由合比定理知 $\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$ .....(*)

由(i)、(ii)的結論，可得四面體 $CAMF$ 與 $DBME$ 的體積相等，因此，任意包含 MN 直線的平面平分四面體 $ABCD$ 的體積。

[注]：$\because E,N,B,D$ 共面，$\therefore$ 若 $\overline{EN}$ 不平行 $\overline{BD}$，則平面 MNE 不平行 $\overline{BD}$，所以 $\overline{BD}$ 和 $\overline{EN}$ 的交點 G 即為 MEN 和 $\overline{BD}$ 之交點，連 $\overline{GM}$，因為 G 在 $\overline{BD}$ 上，所以 M、G 都在平面 ABD 上，所以 GM 和 $\overline{AD}$ 有交點 F。

若 $\overline{EN}$ 平行 $\overline{BD}$，則 $\overline{BD}$ 平行 $\overline{MF}$ 否則由以上作法知 $\overline{BD}$ 和 $\overline{EN}$ 會有交點，所以 N 為 $\overline{CD}$ 之中點。所以 E 為 $\overline{BC}$ 之中點，此時(*)顯然成立。

《解題重點》

1.角錐的體積公式（底面積乘高的 $\frac{1}{3}$ 倍）。

2.公共角的三角形面積比為夾角的兩邊乘積比。

3.孟氏定理。

4.合比定理。

《評析》

1.本題配合立體幾何題材設計，跟高二上基礎數學第一章空間向量關係頗密切，惟參與徵答人數卻不多，僅有雄中盧佑群等 11 人，得分率 0.82 尚稱理想，應與徵答人數較少有關。

2.大部分徵答者皆能完整解題，可見學生空間幾何觀念尚佳。

3.由參與徵答人數特別少，顯示我國一般高中生在立體幾何上的基礎仍明顯不足，有待加強。

4.本題解題品質較佳的學生計有建中李國禎、蔡旭程、陳奕瑋，台師大附中王世豪，武陵高中王嘉慶、游志強及雄中盧佑群等 7 人。

評註：

1.本次徵答統計簡表如下：

	問題編號	2011	2012	2013	2014	2015
總人數　30人	得分	71	69	149	79	63
	徵答人數	16	15	27	15	11
	得分率	0.63	0.66	0.79	0.75	0.82
一年級　14人	得分	20	26	60	8	12
	徵答人數	5	5	12	2	2
	得分率	0.57	0.74	0.71	0.57	0.86
二年級　14人	得分	41	35	75	57	39
	徵答人數	9	8	13	11	7
	得分率	0.65	0.63	0.82	0.74	0.80
三年級　2人	得分	10	8	14	14	12
	徵答人數	2	2	2	2	2
	得分率	0.71	0.57	1.00	1.00	0.86
參與徵答總校數：7所 計：　計畫內：5所，非計畫內：2所						

2.本期參與徵答學生數及學校數均創新低，探究其原因可能跟本期題目難度偏高及大多數的高二數理資優生均已分組教學或準備跳級考試之教學有關；惟就本徵答計畫目的而言，仍應值得鼓勵學生參與，以培植數理思考創造能力。

3.本期答題總成績較優異的學生計有建中李國禎，北一女葉書蘋，台師大附中林建位、王世豪，武陵高中游志強等5人。

4.學生心得感言摘錄如下：

①編號2012題總是讓我感覺應有個範圍限制，但又總是找不出這個關鍵的key，希望能幫我點出討論的盲點所在，謝謝！（雄中，盧佑群。）

（注：請參閱參考解答。）

②編號2012題的題意可能並非是本人所了解的題意，故我的解法僅是假設的回答。（雄中，姜宜榮。）

（注：請參閱參考解答。）

③p是質數，y是整數，則$p^2+1=2y^2$是否有無限多組解？（建中，李國禎。）

（注：可以當專題研究。）

④終於解完五道挑戰題了！心情好愉快。上兩次的時間都好趕，再加上學校的課業，所以有不少錯誤的地方，也有沒解完的題目。

大體而言，這個月的五道題並不是極難。編號2011及2014皆可很快的利用數學歸納法得證。編號2013與2015也不難解決。唯有2012比較麻煩，必須先限制範圍，並且有複雜的計算；不過也許有較爲簡便之法。（台師大附中，林建位。）