

第 28 屆(1997)國際物理奧林匹亞競賽

理論競賽試題

物理奧林匹亞代表團

請先仔細閱讀以下規定

1. 你只能用所提供之筆書寫。
2. 你只能在答題紙上的正面作答。
3. 答題時文字敘述儘量精簡，答案以方程式、數字和圖形為主。將每一題的計算結果填寫於答案紙對應格子內。
4. 在封面寫明作答總頁數。
5. 測驗結束時請將答案紙與相關圖表依序排好。

理論試題一：

尺度

- (a) 一小質量懸掛於一理想彈簧(其質量可不計)的下端，並以自然頻率 f 上下振動。今若將彈簧切成兩半，並將此小質量重新掛在彈簧的下端，則此時新的振動頻率 f' 為何?(1.5 分)
- (b) 處於基態的氫原子的半徑為 $a_0 = 0.00529 \text{ nm}$ (通常稱為波耳半徑)，那麼“繃-氫”原子的半徑 a' 是多少？所謂“繃-氫”原子，就是氫原子中的電子為繃子所取代，繃子所帶的電荷和電子完全相同，但繃子的質量是電子的 207 倍。假設質子的質量遠大於電子和繃子的質量。(2 分)
- (c) 地球的平均溫度是 $T = 287 \text{ K}$ ，假若地球與太陽間的平均距離縮小 1%，則新的地球平均溫度將會是多少?(2 分)
- (d) 某一天，空氣是乾燥的，其密度 $\rho = 1.2500 \text{ kg/m}^3$ 。隔天，空氣中的濕度增加了，測知這時空氣中含有 2%(質量百分比)的水蒸氣，且空氣的壓力和溫度和前一天相同，則這一天的空氣密度 ρ' 是多少?(2 分)

【註】乾燥空氣的平均分子量為 $28.8(\text{g/mol})$ ，水的分子量為 $18(\text{g/mol})$ ，假設空氣和水蒸氣皆為理想氣體。

- (e)現有某種廠牌的直升機，假若其引擎的機械輸出功率為 P ，則可飛上空中。今若按照前架直升機的式樣複製打造，但其各種尺寸正好縮為原機的二分之一，則欲使該機飛上空中，所需的機械輸出功率 P' 為何？(2.5 分)

理論試題二：

原子核質量與穩定度

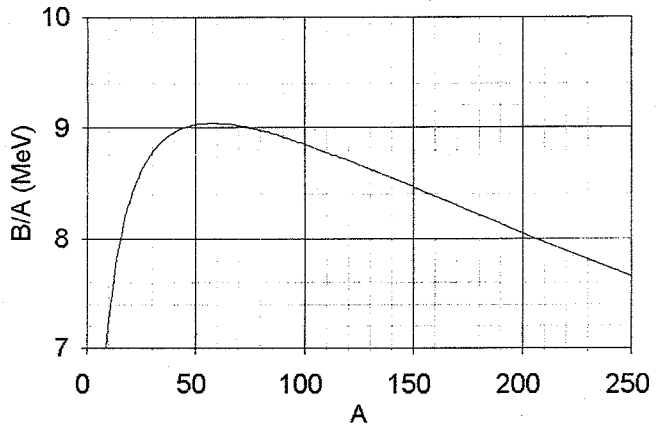
本題中所有的能量皆以 MeV(百萬電子伏特)為單位。

1 MeV = 1.6×10^{-13} J (即使不知道此數值，仍然可以解題)。

質子數為 Z ，中子數為 N (即質量數為 $A=N+Z$)，其質量 M 等於組成該原子核的自由核子(即質子或中子)的質量總和減去束縛能 B/c^2 。

$$Mc^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

B/A 代表每一核子的平均束縛能。一般而言， B/A 值愈大，則原子核愈穩定。上圖縱座標所示為對應某一 A 值時的最大 B/A 值。



- (a)當原子核的質量數超過某一數值 A_α 時，原子核就不穩定；由於它們的束縛能變得足夠小，因此得以釋放出 α 粒子($A=4$)。將上圖中超過 $A=100$ 的曲線部分近似為一直線，利用此直線性質估算 A_α 的數值。(3 分)

對此一模型，其假設如下：

- 衰變前後的原子核都可在上圖曲線上找到對應點。
- α 粒子的總束縛能為 $B_4 = 25.0$ MeV (這個數值不能從圖中讀出)

- (b)質子數為 Z ，中子數為 N (質量數 $A=N+Z$) 的原子核的總束縛能可以用下面的經驗公式表示之

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} - \delta$$

上式中 δ 的數值給定如下：

$+a_p A^{-3/4}$ ，對奇數 N /奇數 Z 的原子核。

0，對奇數 N /偶數 Z 或 奇數 Z /偶數 N 的原子核。

$-a_p A^{-3/4}$ ，對偶數 N /偶數 Z 的原子核。

各係數數值如下：

$a_v = 15.8 \text{ MeV}$; $a_s = 16.8 \text{ MeV}$; $a_c = 0.72 \text{ MeV}$; $a_\alpha = 23.5 \text{ MeV}$; $a_p = 33.5 \text{ MeV}$.

(i) 對一給定的質量數 A ，試導出具有最大束縛能原子核的質子數 Z_{max} 的表示式。(本小題中忽略 δ 項的效應)。(2 分)

(ii) 對 $A=200$ 的原子核，試求出具有最大的 B/A 值，所對應的質量數 Z ？(必須考慮 δ 項的效應)。(2 分)

(iii) 考慮列在答案卷上 $A=128$ 的三種原子核，試判斷那些原子核，就能量觀點而言，是穩定的？那些原子核則具有足夠的能量，可以進行下列的衰變過程？照(i)小題的方式，求出 Z_{max} ，並在答案卷的表格中逐項填寫。

填表時請注意：

- 以 \checkmark 記號，標出在能量上可以進行的衰變過程。
- 以 \circ 記號，標出在能量上不可以進行的衰變過程。
- 僅考慮這三種原子核之間的轉換。

衰變過程：

- (1) β^- 衰變：從原子核中放射出一個電子。
- (2) β^+ 衰變：從原子核中放射出一個正子。
- (3) $\beta^- \beta^-$ 衰變：同時從原子核中放射出兩個電子。
- (4) 電子捕獲：原子核捕捉原子中的電子。

電子及正子的靜止質量均為 $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ ；質子的靜止質量為 $m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}$ ；

中子的靜止質量為 $m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$ 。(3 分)

原子核/過程	β^- -衰變	β^+ -衰變	電子捕獲	$\beta^- \beta^-$ -衰變
$^{128}_{53}\text{I}$				
$^{128}_{54}\text{Xe}$				
$^{128}_{55}\text{Cs}$				

$^A_Z X, X$

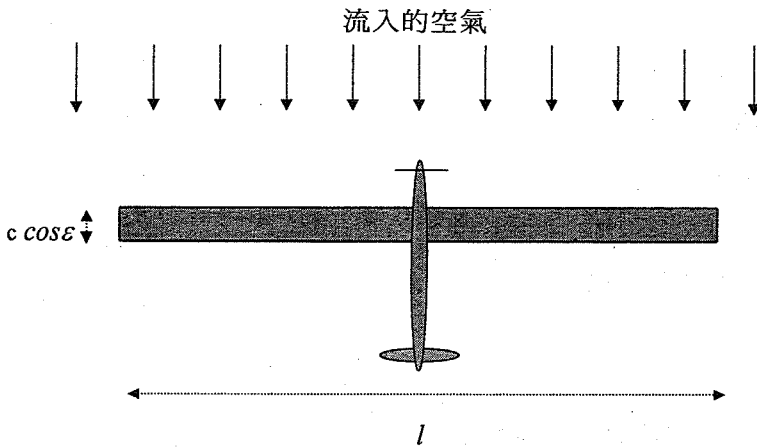
原子核符號： $^A_Z X$ ， X 化學元素符號。

理論試題三：

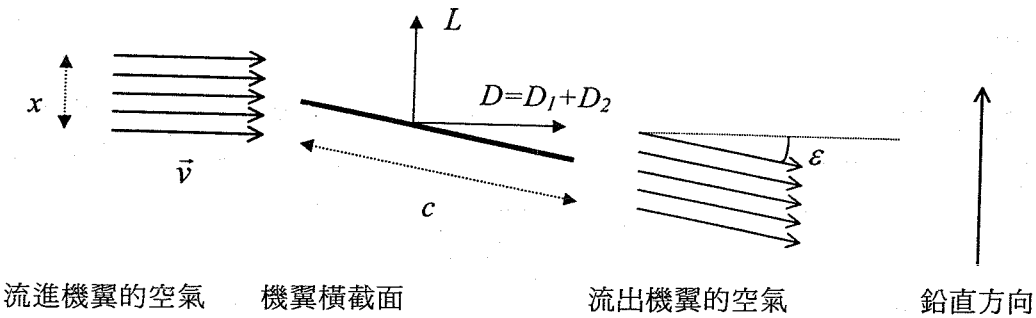
太陽能飛機

設計一架利用太陽能即可飛行的飛機。最有效的設計方式乃是在該飛機機翼的上表面完全以太陽能電池覆蓋。電池供應電力，以驅動飛機的馬達及螺旋槳。考慮一長方形平板型機翼長 l ，寬 c ，機翼的表面積為 $S = cl$ ，機翼長寬比為 $A = l/c$ 。考慮一高度(垂直厚度)為 x ，長度為 l 的一層空氣，當流經機翼表面後，被偏折向下一小角度 ϵ ，如下圖所示，但速率只有少許變化。我們可以透過這種考慮來得出機翼設計的近似構想，藉由機翼表面控制，選擇最佳角度 ϵ 飛行。這種簡單模型當取 $x = \pi l/4$ 時，就相當接近實際情形。我們就考慮這樣的情況。飛機的總質量設為 M ，並相對於周圍空氣以 \vec{v} 飛行。在下面的計算中，只考慮流過機翼表面的空氣。

由上往下看的飛機俯視圖(飛機本身的參考座標系)



機翼側面圖 (隨飛機運動的參考座標系)



忽略由於螺旋槳造成的氣流變形。

(a)考慮通過機翼的空氣之動量變化，但考慮在空氣速率並不改變的情況下：推導作用於機翼的垂直上昇力 L 及水平阻力 D_1 (以機翼長度、 v 、 ϵ 及空氣密度 ρ 表示之)。假設空氣