流動方向總是平行於紙面(參看機翼側視圖)。(3 分)

(b)考慮另外一個由於空氣流經機翼表面所引起的水平摩擦阻力 D_2。此時空氣會稍微慢下來，其速率的改變量 $\Delta v(<<1\%v)$ 滿足以下關係

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{f}{A}$$

f 的值與 ε 無關。

試求要維持飛機於一定高度，以恆定速度飛行的最小功率情況下，飛機的飛行速率 v_0 的表示式(以 M,f,A,S,ρ 及重力加速度量值 g 表示之)。忽略($\varepsilon^2 f$)項和更高次項。(3 分)

你或許會發現以下的近似式很有幫助

$$1-\cos\varepsilon\approx\frac{\sin^2\varepsilon}{2}$$

(c)在答案卷上畫出功率 P 與飛行速率之間的關係曲線.試求最小功率 P_{min} 的表示式。(以 M,f,A,S,ρ 及 g 表示之)並分別繪出兩種不同來源的阻力的個別貢獻。(2 分)

(d)假設太陽電池能提供足夠的能量，驅動馬達及螺旋槳使得機翼表面產生每平方公尺 10 瓦特的功率。試在此功率下，計算最大的機翼負載 $Mg/s(N/m^2)$ 和飛行速 v_0 率(m/s)。假設 $\rho=1.25kg/m^3$，$f=0.004$，$A=10$。(2 分)

第 28 屆(1997)國際物理奧林匹亞競賽 理論試題參考答案

林明瑞

國立臺灣師範大學　物理系

理論第一題

(a)設原先彈簧的力常數爲 k，則其振盪頻率爲 $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$。若將彈簧分成兩半，則原彈簧相當於由這兩個半彈簧串聯而成。設每一個半彈簧的力常數爲 k'，則

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k'}+\frac{1}{k'}\qquad\Rightarrow k'=2k$$

半彈簧的振動頻率爲 $f' = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k'}{m}} = \sqrt{2}f$ 。

(b)氫原子在基態時的半徑 r_0 可由下兩式聯立解出：

$$\begin{cases} r_0 mv = \hbar \\ \dfrac{mv^2}{r_0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{{r_0}^2} \end{cases} \qquad \Rightarrow r_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \propto \frac{1}{m}$$

式中 m 爲電子的質量。若氫原子中的電子爲緲子所取代，則

$$r_\mu = \left(\frac{m}{m_\mu}\right) r_0 = \frac{1}{207} r_0 = \frac{0.0529 \times 10^{-9}}{207} = 2.56 \times 10^{-13} m = 0.256 pm \text{。}$$

(c)設太陽的熱輻射功率爲 P ，太陽和地球之間的距離爲 R ，地球的半徑爲 R_E ，地球對太陽輻射的反射比爲 r ，則地球表面每秒內所吸收的太陽能爲 $(1-r)\dfrac{P}{4\pi R^2} \cdot \pi R_E^2$ 。若地球表面的平均溫度爲 T ，其熱輻射的發射強度爲 ε ，史特凡常數爲 σ ，則地球表面每秒內輻射出去的能量爲 $4\pi r_E^2 \varepsilon\sigma T^4$。當地球表面的溫度達成熱平衡時，則上述兩量相等，即

$$(1-r)\frac{P}{4\pi R^2} \cdot \pi R_E^2 = 4\pi r_E^2 \varepsilon\sigma T^4 \qquad \Rightarrow T \propto \sqrt{\frac{1}{R}}$$

如果地球和太陽之間的距離縮小 1%，則新的地球平均溫度將爲

$$T' = \sqrt{\frac{R}{(1-0.01)R}} T = \frac{287}{\sqrt{0.99}} = 288.4K \approx 288K \text{。}$$

(d)設氣體的質量爲 M ，分子量爲 m ，由理想氣體方程式 $PV=NkT$ ，可得氣體的密度爲以 ρ_1、m_1 和 ρ_2、m_2 分別代表乾燥空氣和潮濕空氣的密度和平均分子量，則因題設空氣的壓力和溫度不變，所以

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m_2}{m_1} \qquad \Rightarrow \frac{\rho_2}{1.2500} = \frac{m_2}{28.8}$$

設潮濕空氣的質量爲 M_2，其內所含的分子數爲 N_2，則

$$N_2 = \frac{0.98M_2}{28.8} + \frac{0.02M_2}{18} \qquad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{M_2}{N_2} = \frac{1}{\dfrac{0.98}{28.8} + \dfrac{0.02}{18}}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_2 = \frac{1}{28.8\left(\dfrac{0.98}{28.8} + \dfrac{0.02}{18}\right)} = 1.2352 kg/m^3$$

(e)直升機可以飛上空中，是因爲其螺旋槳轉動時向下推壓空氣，而獲得來自空氣的向上反作用力。設直升機所生向下的推力爲 T ，被推壓向下的空氣流速爲 v ，則直升機引擎的機械輸出功率爲

$$P = Tv$$

式中 T 等於直升機的重量 W 。設每秒內被推壓向下的空氣質量爲 dm/dt ，螺旋槳葉片掃過的面積爲 A ，則

$$T = v\frac{dm}{dt}\ ;\ \frac{dm}{dt} = \rho A v\ ;\ \therefore T = W = \rho A v^2$$

以 L 代表直升機的線性量度，則

$$W \propto L^3,\quad A \propto L^2 \qquad \Rightarrow \quad v \propto \sqrt{\frac{W}{A}} \propto \sqrt{L} \qquad \Rightarrow \quad P = Wv \propto L^{3.5}$$

若直升機的尺寸縮爲原機的二分之一，則所需的引擎輸出功率爲

$$P' = P\left(\frac{0.5L}{L}\right)^{3.5} = 0.0884P$$

評分標準

(a)	1.5 分	寫出 f 和 k 的關係。	0.5 分
		半彈簧的力常數。	0.5 分
		正確的答案。	0.5 分
(b)	2.0 分	量子化條件。	0.5 分
		角動量的數學式。	0.5 分
		正確的答案	1.0 分
(c)	2.0 分	正確的比例式。	1.0 分
		正確的答案。	1.0 分
(d)	2.0 分	寫出理想氣體定律。	0.5 分
		標出分子數。	0.5 分
		正確的答案。	1.0 分
(e)	2.5 分	W 、 X 的比例式。	0.5 分
		寫出 $T = v\frac{dm}{dt}$ 。	0.5 分
			0.5 分
		寫出 $T = \rho A v^2$ 。	0.5 分
		能消去 v 。	0.5 分
		正確的答案。	

合計　10.0 分

理論第二題

(a) α 衰變的反應式如下：

$$A \to (A-4) + \alpha\,(A=4)$$

使此衰變得以發生的能量條件如下：

$$m_A c^2 - m_{A-4}c^2 m_4 c^2 > 0$$

$$\left(Zm_p c^2 + Nm_b c^2 - B_A\right) - \left((Z-2)m_p c^2 + (N-2)m_n c^2 - B_{A-4}\right) - \left(2m_p c^2 + 2m_n c^2 - B_A\right) > 0$$

$$\Rightarrow \quad -B_A + B_{A-4} + B_4 > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

由題設在 B/A 對 A 的曲線圖中，超過 A=100 的曲線部分近似爲一直線，可寫成下列直線方程式：

$$\frac{B}{A} = a + bA \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

利用圖中的數據，可求得 $a = 9.6MeV$，$b = -0.0080MeV$ 。

由(2)式可求得不同的質量數 A 所對應的束縛能 B 值。(1)可改寫爲

$$-A(a+bA)+(A-4)(a+b(A-4))+B_4>0$$

$$\Rightarrow \quad -8bA-4a+16b+B_4>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將 a 和 b 的數值帶入(3)式可得

$$0.064A-38.4-0.128+25.0>0 \qquad \Rightarrow \quad A>211$$

(b)

(i)由於 A 固定，所以束縛能 B 爲最大值的條件爲當 $Z=Z_{\max}$ 時，

$$\frac{dB}{dZ}=-2Za_cA^{-\frac{1}{3}}-\frac{a_a}{A}(-4A+8Z)=0$$

$$\Rightarrow \quad Z_{\max}=\frac{4a_a}{2a_cA^{-\frac{1}{2}}+8a_z/A}=\frac{A}{2}\left[1+\frac{a_cA^{\frac{2}{3}}}{4a_0}\right]^{-1} \quad \cdots\cdots(4)$$

(ii)以 A=200 代入(4)式，可得

$$Z_{\max}=\frac{200}{2}\left[1+\frac{0.72\times 200^{\frac{2}{3}}}{4\times 23.5}\right]=79.24$$

上式未考慮 δ 項的效應。如果加計 δ 項的效應，則因 A 爲偶數，所以原子核必爲奇數 N/奇數 Z 或是偶數 N/偶數 Z 。因此 $\frac{dB}{dZ}$ 的數學式應寫爲

$$\frac{dB}{dZ}=-2Za_cA^{-\frac{1}{3}}-\frac{a_a}{A}(-4A+8Z)\pm 2a_pA^{-\frac{3}{4}}$$

如果 Z 增加 1 ，若原子核由偶數 N/偶數 Z 變爲奇數 N/奇數 Z ，則上式中最後一項的符號取負號；反之，若原子核由奇數 N/奇數 Z 變爲偶數 N/偶數 Z ，則上式中最後一項的符號取正號。由於該項的修正值甚小，所以 $Z_{\max}$ 的數值仍略大於 79 。但 $Z_{\max}$ 必須爲整數，且由束縛能的數值較有利於偶數 N/偶數 Z ，所以取 $Z_{\max}$=80 。爲了驗證起見，我們可直接計算質子數在 80 附近(質量數固定爲 200)的原子核的束縛能。

$$B=15.8\times 200-16.8\times 200^{\frac{2}{3}}-0.72\times Z^2\times 200^{-\frac{1}{3}}-23.5\times\frac{(200-2Z)^2}{200}\pm 33.5\times 200^{-\frac{3}{4}}$$

$$=2585.448-0.123\times Z^2-0.47\times(100-Z)^2\pm 0.630MeV$$

上式中最後一項的符號爲當 Z 爲偶數時，取正號；奇數時取負號。

Z	B(MeV)	Z	B(MeV)	Z	B(MeV)
77	1606.921	80	1610.878	82	1606.746
78	1610.266	81	1608.145	83	1601.641
79	1609.905				

由上表可確證當 Z=80 時，原子核的束縛能最大。

(iii)在 A=128 的原子核中，最穩定原子核的質子數可從(4)式解出：

$$Z_{\max}=\frac{128}{2}\left[1+\frac{0.72\times128^{\frac{2}{3}}}{4\times23.5}\right]^{-1}=53.58$$

因 $Z_{\max}$ 必須爲偶數，且束縛能的數值較有利於偶數 N/偶數 Z，所以取 $Z_{\max}=54$。

(1) β^- 衰變：$n\to p+e^-$，其對應的核反應式爲

$${}^{A}_{Z}X\to{}^{A}_{Z+1}X+{}^{0}_{-1}e$$

使此衰變得以發生的能量條件如下：

$$\left(Zm_pc^2+Nm_nc^2-B_Z\right)-\left((Z+1)m_pc^2+(N-1)_nc^2-B_{Z+1}\right)-m_ec^2>0$$

$$\Rightarrow\quad B_{Z+1}-B_Z>-(m_nc^2-m_pc^2-m_ec^2)$$

$$\Rightarrow\quad B_{Z+1}-B_Z>-(939.57-938.27-0.51)MeV=-0.79MeV$$

(2) β^+ 衰變：$n\to p+e^+$，其對應的核反應式爲

$${}^{A}_{Z}X\to{}^{A}_{Z-1}X+{}^{0}_{+1}e$$

使此衰變得以發生的能量條件如下：

$$\left(Zm_pc^2+Nm_nc^2-B_Z\right)-\left((Z-1)m_pc^2+(N+1)_nc^2-B_{Z-1}\right)-m_ec^2>0$$

$$\Rightarrow\quad B_{Z-1}-B_Z>-(m_pc^2-m_nc^2-m_ec^2)$$

$$\Rightarrow\quad B_{Z-1}-B_Z>1.81MeV$$

(3) $\beta^-\beta^-$ 衰變：$2n\to2p+2e^+$，其對應的核反應式爲

$${}^{A}_{Z}X\to{}^{A}_{Z+2}X+2{}^{0}_{-1}e$$

使此衰變得以發生的能量條件如下：

$$\left(Zm_pc^2+Nm_nc^2-B_Z\right)-\left((Z+2)m_pc^2+(N-2)m_nc^2-B_{Z+2}\right)-m_ec^2>0$$

$$\Rightarrow\quad B_{Z+2}-B_Z>-2(m_nc^2-m_pc^2-m_ec^2)$$

$$\Rightarrow\quad B_{Z+2}-B_Z>-1.58MeV$$

(4)電子捕獲：$e^-+p\to n$ $\qquad{}^{A}_{Z}X+{}^{0}_{-1}e\to{}^{A}_{Z-1}X$

使此衰變得以發生的能量條件如下：

$$\left(Zm_pc^2+Nm_nc^2-B_Z\right)+m_ec^2-\left((Z-1)m_pc^2+(N+1)m_nc^2-B_{Z-1}\right)>0$$

$$\Rightarrow\quad B_{Z-1}-B_Z>-(m_pc^2-m_ec^2-m_nc^2)$$

$$\Rightarrow\quad B_{Z-1}-B_Z>0.79MeV$$

質量數爲 128 的原子核，其束縛能可由下式求出：

$$B=15.8\times128-16.8\times128^{\frac{2}{3}}-0.72\times Z^2\times128^{-\frac{1}{3}}-23.5\times\frac{(128-2Z)^2}{128}\pm33.5\times128^{-\frac{3}{4}}$$

$$= 1595.707 - 0.143 \times Z^2 - 0.734 \times (64 - Z)^2 \pm 0.880 MeV$$

上式中最後一項的符號爲當 Z 爲偶數時，取正號；奇數時取負號。

原子核	束縛能 B(MeV)
${}^{128}_{53}I$	1104.326
${}^{128}_{54}Xe$	1106.199
${}^{128}_{55}Cs$	1102.798

按照以上所述各種衰變的能量條件，可得下表(可發生的打 ∨，不可發生的打○)：

原子核	β^-衰變	β^+衰變	$\beta^-\beta^-$衰變	電子捕獲
${}^{128}_{53}I$	∨	○	∨	○
${}^{128}_{54}Xe$	○	○	○	○
${}^{128}_{55}Cs$	○	∨	○	∨

評分標準

(a) 3.0 分 推導過程。 1.5 分
正確的答案。 1.5 分

(b)

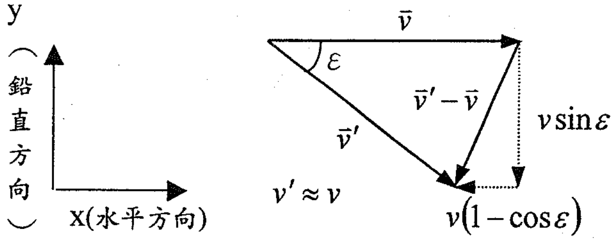
(i) 2.0 分 推導過程。 1.0 分
正確的答案。 1.0 分

(ii) 2.0 分 推導過程。 1.0 分
正確的答案。 1.0 分

(iii) 3.0 分 每一格(共 12 格) 0.25 分 合計 10.0 分

理論第三題

(a)按題意，空氣流經機翼表面後，被偏折向下一個角度 ε。設機翼施於空氣的力爲 $\vec{F}$，在 dt 時間內，有 dm 質量的空氣流過機翼表面，被偏折向下，其速度由 $\vec{v}$ 變爲 $\vec{v}'$，如下圖所示。



由牛頓第二定律知，空氣所受的衝量等於其動量的變化，所以

$$\vec{F}dt = dm(\vec{v}' - \vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}' - \vec{v}) \qquad \text{式中 } \frac{dm}{dt} = \rho x \ell v = \frac{\pi}{4}\rho \ell^2 v$$

飛機所受的力即爲 $\vec{F}$ 的反作用力，因此空氣作用於飛機的垂直上昇力 L 及水平阻力 D_1，可由上圖中得出如下：

$$L=-F_y=\frac{\pi}{4}\rho\ell^2v^2\sin\varepsilon \cdots\cdots(1)$$

$$D_1=-F_x=\frac{\pi}{4}\rho\ell^2v^2(1-\cos\varepsilon) \cdots\cdots(2)$$

(b)加計飛機所受的水平摩擦阻力 D_2，則使飛機在同一高度以等速平飛，所需的引擎輸出功率爲

$$P=(D_1+D_2)v \cdots\cdots(3)$$

D_2是由於空氣流經機翼時，和機翼表面摩擦所致。設單位時間內從機翼前沿以速度$\vec{v}_1$流入的空氣質量爲$\frac{dm_1}{dt}$，而以速度$\vec{v}_2$從其後沿流出者爲$\frac{dm_2}{dt}$，則

$$D_2=v_1\frac{dm_1}{dt}-v_2\frac{dm_2}{dt} \cdots\cdots(4)$$

因爲機翼表面不會吸附氣體，也不會放出氣體，所以流入和流出的空氣質量應相等，即

$$\frac{dm_1}{dt}=\frac{dm_2}{dt}=\frac{dm}{dt}=x\ell\rho v$$

以$v_1=v$和$v_2=v-\Delta v$代入(4)，得

$$D_2=(v_1-v_2)\frac{dm}{dt}=(\Delta v)x\ell\rho v=\left(\frac{fv}{A}\right)\left(\frac{\pi\ell}{4}\right)\ell\rho v=\frac{\pi f}{4A}\rho v^2\ell^2 \cdots\cdots(5)$$

【註】摩擦阻力必定是沿著機翼表面的方向，但機翼表面和水平面夾成一個小角度 ε，所以此摩擦力的水平分量應爲

$$D_2\cos\varepsilon\approx\frac{\pi f}{4A}\rho v^2\ell^2\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\ldots\right)\approx\frac{\pi f}{4A}\rho v^2\ell^2+O(\varepsilon^2 f)$$

如果忽略或更高次項，則上式之值和(5)式相同。

飛機在水平方向上所受的總阻力爲

$$D=D_1+D_2=\frac{\pi}{4}\rho v^2\ell^2\left((1-\cos\varepsilon)+\frac{f}{A}\right)\approx\frac{\pi}{4}\rho v^2\ell^2\left(\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon+\frac{f}{A}\right) \cdots\cdots(6)$$

飛機可以平飛，即表示其重量應等於所受的垂直上昇力 L，由(1)式得

$$L=Mg=\frac{\pi}{4}\rho v^2\ell^2\sin\varepsilon, \qquad \Rightarrow \qquad \sin\varepsilon=\frac{4Mg}{\pi\rho v^2\ell^2} \cdots\cdots(7)$$

由上式可知飛機的速度v和機翼面的角度ε有關。將(6)和(7)代入(3)，可得

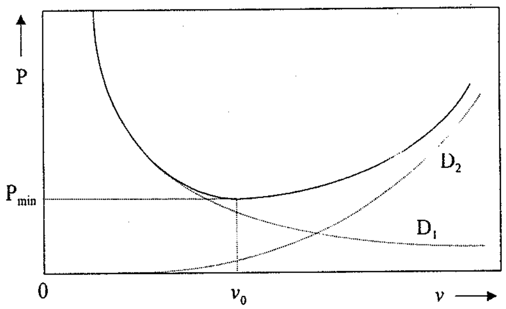
$$P=Dv=\frac{\pi}{4}\rho v^3\ell^2\left[\frac{f}{A}+\frac{1}{2}\left(\frac{4Mg}{\pi\rho v^2\ell^2}\right)\right]=\frac{\pi}{4}\rho v^3\ell^2\frac{f}{A}+\frac{2(Mg)^2}{\pi\rho v\ell^2} \cdots\cdots(8)$$

上式爲功率 P 和飛行速率v之間的函數關係。設當$v=v_0$時，功率最小，則

$$\frac{dp}{dv}\Big|_{v0}=\frac{3\pi}{4}\rho {v_0}^2\ell^2\frac{f}{A}-\frac{2(Mg)^2}{\pi\rho {v_0}^2\ell^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad v_0=\left[\frac{8(Mg)^2 A}{3\pi^2\rho^2\ell^4 f}\right]^{\frac{1}{4}}=\left[\frac{8}{3Af}\left(\frac{Mg}{\pi\rho S}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}} \quad \cdots\cdots(9)$$

(c)功率 P 和飛行速率 v 之間的函數關係曲線如下所示：



$$P_{\min}=\frac{\pi}{4}\rho v_0^3\ell^2\left[\frac{f}{A}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(4Mg)^2}{(\pi\rho v_0^2)^2}\right]=\frac{\pi}{4}\rho v_0^3\ell^2\left[\frac{f}{A}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(4Mg)^2}{(\pi\rho\ell^2)^2}\cdot\frac{3\pi^2\rho^2\ell^4 f}{8(Mg)^2 A}\right]$$

$$=\pi\rho v_0^3\ell^2\frac{f}{A}=\pi\rho v_0^3 Sf$$

以(9)式之 v_0 代入上式，得

$$P_{\min}=\pi\rho Sf\left[\frac{8}{3Af}\left(\frac{Mg}{\pi\rho S}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{8}{3A}\right)^{\frac{3}{4}} f^{\frac{1}{4}}\frac{(Mg)^{\frac{3}{2}}}{(\pi\rho S)^{\frac{1}{2}}}$$

(d)太陽電池所提供的能量=10W/m² × S ，則

$$P_{\min}=10S$$

$$\Rightarrow\left(\frac{8}{3A}\right)^{\frac{3}{4}} f^{\frac{1}{4}}\frac{(Mg)^{\frac{3}{2}}}{(\pi\rho S)^{\frac{1}{2}}}=10S \qquad \Rightarrow\frac{Mg}{S}=10^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3A}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(\pi\rho)^{\frac{1}{3}}}{f^{\frac{1}{6}}} \quad \cdots\cdots(10)$$

將已知數值代入(9)和(10)式，可得 $\dfrac{Mg}{S}=35.6N/m^2,\quad v_0=8.60m/s$

評分標準：(最小給分單位： 0.25 分)

(a)	3.0 分	牛頓定律列式。	1.0 分			上升力的推導過程。	0.5 分
		阻力的推導過程。	0.5 分			正確的 L 公式。	0.5 分
		正確的 D_1 公式。	0.5 分				
(b)	3.0 分	D_2 的推導過程。	0.5 分			P_{min} 的推導過程。	1.0 分
		正確的 D_2 公式。	0.5 分			正確的 v_0 公式。	1.0 分
(c)	2.0 分	正確的 P_{min} 公式。	1.0 分	(d)	2.0 分	正確的機翼負載值。	1.0 分
		正確的 P-v 曲線。	1.0 分			正確的 v_0 值。	1.0 分

合計 10.0 分