數值方法的命題

石厚高
臺北市立建國高級中學

本學期三年級理科數學第一次段考由筆者命題，這次段考主要考「數值方法」這一章，它既不好教也不好命題。從二月二十二日開教學研究會接到通知，就每天出上幾題，我的原則是就課本命題，上課聽講看過書作過習題的會考得好。題目一換再換，數據一改再改，完稿後請學弟張文良老師作一遍，他很喜歡給予肯定，所以就定稿，我不找同年級的老師提供意見。同時要自己教的班級不能因爲自己班老師命題就佔便宜。張學弟教高二，立場當然是超然的，三月十四日送教務處，三月二十七日考試當天各班學生幾乎都是 70 分鐘鈴響才交卷，不過並沒有大呼小叫完了完了，可見試題正常、平順。

學生很煩惱的是本章有太多的誤差公式，誤差公式不宜對學生作過多強調，試題裡只有三題佔 12 分，分量正常。四月十九日取得全年級各班成績單，本校高三共 33 班，自然組有 25 班，共有 1165 人參加段考，低標 74.56 ，取前面 583 名得高標 85.61 ，零分 3 人， 100 分 7 人，不及格 144 人，佔全體 12 %，對建中學生說來表現得恰如其分。

把 25 班平均分數列出來，有二班在 80 分以上，最低的班是 67.00 。爲甚麼會有這麼大的差距？建中未作能力分班，最高的 83.22 是資優班，三年前以數學滿分 120 考進建中，當然可以理解，更有些班很多學生轉往第三類組（醫、農），該組要多考一科生物，不是很有自信心的不敢輕易轉組，所以原班平均分數就變低了。有些學生不重視這一章，因爲大專聯考只出過牛頓法求根的近似值，未作應有關注所以成績偏低。聽說有些學校有老師不教這一章，實在是不應該的。

我統計各題答對人數，一共取得六個班共 281 名學生，列出答對人數與比率（如附表）。只有三題答對率在 50 %以下，它們是 25 、 26 與 32 ；第 32 題，因爲 n=3 要寫出 $P_n(x)$的 3 次近似，學生誤會要 n 次近式。其實這題是很容易的。我把 25 與 26 題的略解寫出來。這份試題老師或學生都是反應熱烈，學生對這一章很是感冒，多數學生對自己的表現滿意，所以我把它發表出來，敬請教師參考指正（附錄爲試題與參考答案）。

有老師對 21 題質疑，因爲題目的「阿基米德」改爲「一次近似」爲宜，不過由「答對率」 72.95 可以理解學生是多麼的「善體題意」；當然若有同行採用這分試題改成「一次近似」我是不反對的。

答對人數與比率表

題號	答對人數	比率	題號	答對人數	比率
1	246	87.54	20	218	77.58
2	251	89.32	21	205	72.95
3	239	85.05	22	181	64.41
4	249	88.61	23	201	71.53
5	227	80.78	24	214	76.16
6	251	89.32	25	92	32.74
7	198	70.46	26	41	14.59
8	210	74.73	27	237	84.34
9	152	54.09	28	244	86.83
10	171	60.85	29	189	67.26
11	254	90.39	30	214	76.16
12	260	92.53	31	214	76.16
13	200	71.17	32	125	44.48
14	191	67.97	33	247	87.90
15	250	88.97	34	244	86.83
16	193	68.68	35	224	79.72
17	248	88.26	36	231	82.21
18	197	70.11	37	178	63.35
19	256	91.10			

附錄

(一)臺北市立建國高級中學 85 學年度第二學期高三自然組期中考數學試題

注意：第(1)至(11)每題 2 分，其餘每題 3 分

要求 $\sqrt{8-\sqrt{5}}$ 至小數 2 位，則先要求 $\sqrt{5}$ 至小數(1)位

因 $\sqrt[6]{2}=\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ 要求 $\sqrt[6]{2}$ 至小數一位先要求 $\sqrt[3]{2}$ 至小數(2)位

或先求 $\sqrt{2}$ 至小數(3)位

因 $\sqrt[12]{2}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}}$ 要求 $\sqrt[12]{2}$ 至小數一位先要求 $\sqrt[3]{2}$ 至小數(4)位

或先求 $\sqrt{2}$ 至小數(5)位

設 $a_1=3.3$，利用牛頓法求 $\sqrt{9.9}$ 的近似值，得 $a_2=$(6)由誤差公式 $\dfrac{(a_1^2-s)^2}{8a_1s}$

得(7)< $\sqrt{9.9}$ <(8)故得 a_2 更好近似值爲(9)正確至小數(10)位

利用傳統方法得 $\sqrt{5776}=$(11)

設 n 爲自然數，$f(x)=x^4-2x^3+2x-34=0$ 有一根 r 在 n 與 n + 1 之間，則 n =(12)

$f(x)=0$ 之四根各減 n 作新方程式 $g(x)=0$, $g(x)$之領導係數爲 1

得 $g(x)=$(13)，故得 r 正確至一位小數之值爲(14)

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=8$ 附近之一次近似爲(15)，二次近似爲(16)

故得 $\sqrt[3]{8.12}$ 之一次近似值爲(17)，二次近似值爲(18)

方程式 $f(x)=x^4-3x^3-6x^2+28x-24=0$ 有一根爲 2，2 是(19)重根

$f(x)$在 $x=2$ 附近之泰勒展開式爲(20)

設 $w=4$, $p=0.16$，利用阿基米德方法得 $\sqrt{16.16}$ 之近似值爲(21)再由誤差

$\dfrac{p^2}{8w^3}$ 得更好近似值爲(22)

線段 $\overline{AB}$ 上取一點 P, A-P-B 若 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AB}:\overline{AP}=k$ 則 k =(23), $\sin 18°$ =(24),

一圓之半徑爲 2，則此圓內接正五邊形之邊長爲(25)，此圓外切正五邊形之邊長爲(26)

設 $\dfrac{\pi}{180}=0.0174532$, $(\dfrac{\pi}{180})^2=0.0003046$, $(\dfrac{\pi}{180})^3=0.0000054$

又以 $P_n(x)$表正弦函數 $f(x)=\sin(x)$在 $x=0$ 附近之 n 次泰勒展開式,，

則 $P_1(x)=$(27)，由一次近似方法得 $\sin 1°$ 之近似值爲(28)又由誤差公式

$|\sin x-P_{2k-1}(x)|<\dfrac{1}{(2k+1)!}\cdot|x|^{2k+1}$，以(28)之結果代入可得 $\sin 1°$ 之值爲(29)正確至

(30)位小數

設 $P_n(x)$表示函數 $f(x)=\ln(1+x)$在 $x=0$ 附近之 n 次泰勒展開式，根據誤差公式

$|\ln(1+x)-P_n(x)|<\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$，要使 $\ln\dfrac{4}{3}$ 精確至小數二位，要取 n =(31)，

而 $P_n(x)=$(32)。參考數據 $\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3})^2=0.055555\ldots$, $\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3})^3=0.012345\ldots$,

$\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{3})^4=0.003086\ldots$, $\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{3})^5=0.000823\ldots$

將區間[0,1]分成二等分，以下列各法求定積分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ 之近似值，

(33)左端點矩形法　(34)右端點矩形法　(35)中點矩形法

(36)梯形法　(37)拋物線法　注意：(33)至(37)答案以分數表示

(二)參考答案

注意：第(1)至(11)每題 22 分，其餘每題 3 分

(1)4	(2)2	(3)3	(4)4	(5)6
(6)3.15	(7)3.14625	(8)3.15	(9)3.14	(10)2
(11)76	(12)3	(13) $x^4+10x^3+36x^2+56x-1$		(14)3.0
(15) $2+\frac{1}{12}(x-8)$	(16) $2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{1}{288}(x-8)^2$		(17)2.01	(18)2.00995
(19)3	(20) $(x-2)^4+5(x-2)^3$		(21)4.02	(22)4.01995
(23) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	(24) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	(25) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	(26) $4\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	(27)x
(28)0.0174532…	(29)0.01745	(30)5	(31)3	

(32) $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$　(33) $\frac{5}{6}$　(34) $\frac{7}{12}$　(35) $\frac{24}{35}$　(36) $\frac{17}{24}$　(37) $\frac{1747}{2520}$

(25)略解：設圓之內接正五邊形之邊長為 x，則此邊所對中心角為 72°

$$\therefore x^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\cos 72^\circ = 8 - 8 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} = 10 - 2\sqrt{5}$$

$$\therefore x = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

(26)略解：在內接正五邊形各頂點作切線，即得一外切正五邊形，任一頂點與內接正五邊形之一邊構成一等腰三角形，設腰為 x，則外切正五邊形之邊長為 2x，故得

$$x^2 + x^2 - 2x \cdot x\cos 108^\circ = 10 - 2\sqrt{5} \qquad 2x^2\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = 10 - 2\sqrt{5}$$

$$x^2 = \frac{2(10-2\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}} = 20 - 8\sqrt{5}$$ 故得 $2x = 4\sqrt{5-2\sqrt{5}}$