三線性坐標與面積坐標(五)

趙文敏
國立臺灣師範大學　數學系

戊、三線性坐標系與面積坐標系中的圓

定理 3 與定理 4 的坐標變換公式，若用來推導三線性坐標與面積坐標系中的兩點距離公式，則公式頗為繁複。但我們可用這些變換公式來討論圓的方程式。

定理 16（圓的齊次方程式）

設 $\Delta A_1A_2A_3$ 為任意三角形，其三邊長分別為 a_1、a_2 與 a_3。

(1)在 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標系中，圓的方程式都是下述形式：

$$a_1^2\mu_2\mu_3+a_2^2\mu_3\mu_1+a_3^2\mu_1\mu_2-(c_1\mu_1+c_2\mu_2+c_3\mu_3)(\mu_1+\mu_2+\mu_3)=0,$$

其中，c_1、c_2 與 c_3 分別是頂點 A_1、A_2 與 A_3 對該圓的冪(power)。

(2)在 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三線性坐標系中，圓的方程式都是下述形式：

$$a_1\nu_2\nu_3+a_2\nu_3\nu_1+a_3\nu_1\nu_2-(d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3)(a_1\nu_1+a_2\nu_2+a_3\nu_3)=0,$$

其中，$a_2a_3d_1$、$a_3a_1d_2$ 與 $a_1a_2d_3$ 分別是頂點 A_1、A_2 與 A_3 對該圓的冪。

證：(1)設 Γ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的平面上一圓，其半徑為 r。在此平面上任選一直角坐標系，設三頂點的直角坐標分別為 $A_1(x_1,y_1)$、$A_2(x_2,y_2)$ 與 $A_3(x_3,y_3)$，而 Γ 的圓心的直角坐標為 (x_0,y_0)。若 P 為圓 Γ 上任一點，它對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標為 $P(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則依定理 3，點 P 的直角坐標 $P(x,y)$ 滿足

$$x=\frac{x_1\mu_1+x_2\mu_2+x_3\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3},\qquad y=\frac{y_1\mu_1+y_2\mu_2+y_3\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}.$$

因為點 P 在圓 Γ 上，所以，可得

$$\left(\frac{x_1\mu_1+x_2\mu_2+x_3\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}-x_0\right)^2+\left(\frac{y_1\mu_1+y_2\mu_2+y_3\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}-y_0\right)^2=r^2,$$

$$((x_1-x_0)\mu_1+(x_2-x_0)\mu_2+(x_3-x_0)\mu_3)^2+((y_1-y_0)\mu_1+(y_2-y_0)\mu_2+(y_3-y_0)\mu_3)^2$$
$$=r^2(\mu_1+\mu_2+\mu_3)^2.$$

若將上述方程式寫成

$$c_1\mu_1^2+c_2\mu_2^2+c_3\mu_3^2+c_{23}\mu_2\mu_3+c_{31}\mu_3\mu_1+c_{12}\mu_1\mu_2=0$$

的形式，則可得

$$c_1=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2-r^2,\qquad c_2=(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2-r^2,\qquad c_3=(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2-r^2,$$

$$c_{23}=2(x_2-x_0)(x_3-x_0)+2(y_2-y_0)(y_3-y_0)-2r^2,$$
$$c_{31}=2(x_3-x_0)(x_1-x_0)+2(y_3-y_0)(y_1-y_0)-2r^2,$$
$$c_{12}=2(x_1-x_0)(x_2-x_0)+2(y_1-y_0)(y_2-y_0)-2r^2。$$

根據前述等式，可得

$$c_2+c_3-c_{23}=((x_2-x_0)-(x_3-x_0))^2+((y_2-y_0)-(y_3-y_0))^2=a_1^2,$$
$$c_3+c_1-c_{31}=((x_3-x_0)-(x_1-x_0))^2+((y_3-y_0)-(y_1-y_0))^2=a_2^2,$$
$$c_1+c_2-c_{12}=((x_1-x_0)-(x_2-x_0))^2+((y_1-y_0)-(y_2-y_0))^2=a_3^2。$$

因此，得 $c_{23}=c_2+c_3-a_1^2, c_{31}=c_3+c_1-a_2^2, c_{12}=c_1+c_2-a_3^2$。代入方程式(*)，即得

$$c_1\mu_1^2+c_2\mu_2^2+c_3\mu_3^2+(c_2+c_3-a_1^2)\mu_2\mu_3+(c_3+c_1-a_2^2)\mu_3\mu_1+(c_1+c_2-a_3^2)\mu_1\mu_2=0,$$
$$(c_1\mu_1+c_2\mu_2+c_3\mu_3)(\mu_1+\mu_2+\mu_3)-(a_1^2\mu_2\mu_3+a_2^2\mu_3\mu_1+a_3^2\mu_1\mu_2)=0。$$

另一方面，依上述 c_1、c_2 與 c_3 的定義，可知 c_1、c_2 與 c_3 分別爲頂點 A_1、A_2 與 A_3 對圓 Γ 的冪。

(2)設點 P 在圓 Γ 上，且點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三線性坐標爲 $P(v_1{:}v_2{:}v_3)$，則點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲 $P(a_1v_1{:}a_2v_2{:}a_3v_3)$。若三頂點 A_1、A_2 與 A_3 對圓 Γ 的冪分別爲 c_1、c_2 與 c_3，則依(1)，得

$$(c_1a_1v_1+c_2a_2v_2+c_3a_3v_3)(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)-(a_1^2a_2a_3v_2v_3+a_1a_2^2a_3v_3v_1+a_1a_2a_3^2v_1v_2)=0。$$

令 $d_1=c_1/(a_2a_3)$、$d_2=c_2/(a_3a_1)$、$d_3=c_3/(a_1a_2)$，則將上式除以 $a_1a_2a_3$，即得

$$(d_1v_1+d_2v_2+d_3v_3)(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)-(a_1v_2v_3+a_2v_3v_1+a_3v_1v_2)=0,$$

此即所欲求的三線性坐標方程式，其中，三頂點 A_1、A_2 與 A_3 對圓 Γ 的冪分別爲 $a_2a_3d_1$、$a_3a_1d_2$ 與 $a_1a_2d_3$。 ||

例 25 (外接圓的方程式)

因爲 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三頂點對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外接圓的冪都等於 0，所以，依定理 16，該外接圓對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標方程式與三線性坐標方程式分別爲

$$a_1^2\mu_2\mu_3+a_2^2\mu_3\mu_1+a_3^2\mu_1\mu_2=0, \qquad a_1v_2v_3+a_2v_3v_1+a_3v_1v_2=0。 \|$$

例 26 (內切圓的方程式)

因爲 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三頂點 A_1、A_2 與 A_3 對其內切圓的冪分別爲 $(s-a_1)^2$、$(s-a_2)^2$ 與 $(s-a_3)^2$，所以，依定理 16，該內切圓對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標方程式與三線性坐標方程式分別爲

$$((s-a_1)^2\mu_1+(s-a_2)^2\mu_2+(s-a_3)^2\mu_3)(\mu_1+\mu_2+\mu_3)$$
$$-(a_1^2\mu_2\mu_3+a_2^2\mu_3\mu_1+a_3^2\mu_1\mu_2)=0,$$
$$((s-a_1)^2a_1v_1+(s-a_2)^2a_2v_2+(s-a_3)^2a_3v_3)(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)$$
$$-a_1a_2a_3(a_1v_2v_3+a_2v_3v_1+a_3v_1v_2)=0。 \|$$

例27（九點圓的方程式）

試證：三角形的三邊中點 O_1、O_2、O_3 及三高的垂足 H_1、H_2、H_3 及垂心至三頂點的中點等九點共圓，稱爲此三角形的九點圓(nine point circle)。更進一步地，$\Delta A_1A_2A_3$ 的九點圓對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標方程式與三線性坐標方程式分別爲

$$(a_2a_3\cos\alpha_1)\mu_1^2+(a_3a_1\cos\alpha_2)\mu_2^2+(a_1a_2\cos\alpha_3)\mu_3^2-a_1^2\mu_2\mu_3-a_2^2\mu_3\mu_1-a_3^2\mu_1\mu_2=0,$$

$$(a_1\cos\alpha_1)v_1^2+(a_2\cos\alpha_2)v_2^2+(a_3\cos\alpha_3)v_3^2-a_1v_2v_3-a_2v_3v_1-a_3v_1v_2=0。$$

證：設過三邊中點的圓對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標方程式爲

$$(c_1\mu_1+c_2\mu_2+c_3\mu_3)(\mu_1+\mu_2+\mu_3)-(a_1^2\mu_2\mu_3+a_2^2\mu_3\mu_1+a_3^2\mu_1\mu_2)=0。$$

將三中點的面積坐標 $O_1(0{:}1{:}1)$、$O_2(1{:}0{:}1)$ 與 $O_3(1{:}1{:}0)$ 代入，即得

$$\begin{cases} \quad\; 2c_2+2c_3=a_1^2 \\ 2c_1 \quad\;\; +2c_3=a_2^2 \\ 2c_1+2c_2 \qquad =a_3^2 \end{cases}$$

解得 $c_1=(a_2^2+a_3^2-a_1^2)/4=(a_2a_3\cos\alpha_1)/2, c_2=(a_3a_1\cos\alpha_2)/2,\ c_3=(a_1a_2\cos\alpha_3)/2$。

代入上述方程式，即得所欲求的面積坐標方程式。

垂心 H 在直線 A_2A_3 上的垂足 H_1 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲 $H_1(0{:}a_2\cos\alpha_3{:}a_3\cos\alpha_2)$，代入圓方程式，即得

$$(a_3a_1\cos\alpha_2)(a_2^2\cos^2\alpha_3)+(a_1a_2\cos\alpha_3)(a_3^2\cos^2\alpha_2)-a_1^2a_2a_3\cos\alpha_2\cos\alpha_3$$
$$=a_2a_3\cos\alpha_2\cos\alpha_3(a_1a_2\cos\alpha_3+a_3a_1\cos\alpha_2-a_1^2)=0。$$

因此，點 H_1 在圓 $O_1O_2O_3$ 上。同理，點 H_2 與 H_3 也在此圓上。

設 $\Delta A_1A_2A_3$ 不是直角三角形，則垂心 H 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的規範化面積坐標爲 $H(\cot\alpha_2\cot\alpha_3{:}\cot\alpha_3\cot\alpha_1{:}\cot\alpha_1\cot\alpha_2)$。於是，$\overline{A_1H}$ 的中點對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲 $(\tan\alpha_1\tan\alpha_2\tan\alpha_3+\tan\alpha_1{:}\tan\alpha_2{:}\tan\alpha_3)$ 或

$(2\tan\alpha_1+\tan\alpha_2+\tan\alpha_3{:}\tan\alpha_2{:}\tan\alpha_3)$。

將此面積坐標代入圓 $O_1O_2O_3$ 的方程式，代入後的第一、五、六項的和等於

$$(a_2a_3\cos\alpha_1)\mu_1(2\tan\alpha_1+\tan\alpha_2+\tan\alpha_3-\frac{a_2}{a_3}\sec\alpha_1\tan\alpha_3-\frac{a_3}{a_2}\sec\alpha_1\tan\alpha_2)。\quad (*)$$

因爲 $\tan\alpha_1+\tan\alpha_2=\sin\alpha_3\sec\alpha_1\sec\alpha_2=a_3a_2^{-1}\sec\alpha_1\tan\alpha_2$，

$\tan\alpha_1+\tan\alpha_3=a_2a_3^{-1}\sec\alpha_1\tan\alpha_3$，所以，上述的和(*)等於0。另一方面，第二、第三、四項的和等於

$$(a_3a_1\cos\alpha_2)\tan^2\alpha_2+(a_1a_2\cos\alpha_3)\tan^2\alpha_3-a_1^2\tan\alpha_2\tan\alpha_3$$
$$=a_1a_2\sin\alpha_3\tan\alpha_2+a_3a_1\sin\alpha_2\tan\alpha_3-a_1^2\tan\alpha_2\tan\alpha_3$$
$$=\tan\alpha_2\tan\alpha_3(a_1a_2\cos\alpha_3+a_3a_1\cos\alpha_2-a_1^2)=0。$$

於是，$\overline{A_1H}$ 的中點在圓 $O_1O_2O_3$ 上。同理，$\overline{A_2H}$、$\overline{A_3H}$ 的中點也在圓 $O_1O_2O_3$ 上。‖

例 28 （ Ptolemy 定理）

若$\square A_1A_2A_3A_4$爲一圓內接四邊形，則$\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_2A_4}=\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_3A_4}+\overline{A_1A_4}\cdot\overline{A_2A_3}$。

證：設點A_4對$\Delta A_1A_2A_3$的面積坐標爲$A_4(p_1:p_2:p_3)$。依例 25 ，可得

$$a_1^2p_2p_3+a_2^2p_3p_1+a_3^2p_1p_2=0，$$

其中，$a_1=\overline{A_2A_3},\quad a_2=\overline{A_3A_1},\quad a_3=\overline{A_1A_2}$。令$\overline{A_1A_4}=b_1$、$\overline{A_2A_4}=b_2$、$\overline{A_3A_4}=b_3$。因爲$A_4$與$A_2$爲對頂，所以$p_1p_3>0$且$p_1p_2<0$。於是，得

$$\begin{aligned}p_1:p_2:p_3&=b_2b_3\sin\angle A_2A_1A_3:(-b_3b_1\sin\angle A_1A_2A_3):b_1b_2\sin\angle A_1A_3A_2\\&=a_1b_2b_3:(-a_2b_3b_1):a_3b_1b_2。\end{aligned}$$

於是，可得

$$-a_1^2a_2a_3b_1^2b_2b_3+a_2^2a_3a_1b_2^2b_3b_1-a_3^2a_1a_2b_3^2b_1b_2=0,$$

$$-a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3=0,\qquad a_2b_2=a_1b_1+a_3b_3,$$

$$\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_2A_4}=\overline{A_1A_4}\cdot\overline{A_2A_3}+\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_3A_4}。\ \|$$

例 29 （ Simson 線）

過三角形的外接圓上任意點，向含三邊的直線作垂線，則三垂足必共線。此直線稱爲該點對該三角形的 Simson 線。

證：設點 P 是與$\Delta A_1A_2A_3$共平面的任一點，而且點 P 對$\Delta A_1A_2A_3$的面積坐標爲$P(p_1:p_2:p_3)$。依例 17 ，由點P至直線A_2A_3的垂直線的面積坐標方程式爲

$$(a_3\cos\alpha_2)\mu_2-(a_2\cos\alpha_3)\mu_3-\frac{(a_3\cos\alpha_2)p_2-(a_2\cos\alpha_3)p_3}{p_1+p_2+p_3}(\mu_1+\mu_2+\mu_3)=0。$$

此垂直線與直線A_2A_3的垂足P_1對$\Delta A_1A_2A_3$的面積坐標爲

$$P_1(0:(p_1+p_2)a_2\cos\alpha_3+p_2a_3\cos\alpha_2:(p_1+p_3)a_3\cos\alpha_2+p_3a_2\cos\alpha_3)$$

或$P_1(0:p_1(a_1a_2\cos\alpha_3)+p_2a_1^2:p_1(a_3a_1\cos\alpha_2)+p_3a_1^2)$。

同理，點 P 至直線A_3A_1的垂足P_2與點 P 至直線A_1A_2的垂足P_3對$\Delta A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲

$$P_2(p_2(a_1a_2\cos\alpha_3)+p_1a_2^2:0:p_2(a_2a_3\cos\alpha_1)+p_3a_2^2),$$

$$P_3(p_3(a_3a_1\cos\alpha_2)+p_1a_3^2:p_3(a_2a_3\cos\alpha_1)+p_2a_3^2:0)。$$

依定理 6 ，考慮此三垂足的面積坐標所成的行列式，並將第二、三行加入第一行，即得

$$\begin{vmatrix}0 & p_1(a_1a_2\cos\alpha_3)+p_2a_1^2 & p_1(a_3a_1\cos\alpha_2)+p_3a_1^2\\ p_2(a_1a_2\cos\alpha_3)+p_1a_2^2 & 0 & p_2(a_2a_3\cos\alpha_1)+p_3a_2^2\\ p_3(a_3a_1\cos\alpha_2)+p_1a_3^2 & p_3(a_2a_3\cos\alpha_1)+p_2a_3^2 & 0\end{vmatrix}$$

$$
=(p_1+p_2+p_3)\begin{vmatrix} a_1^2 & p_1(a_1a_2\cos\alpha_3) & p_1(a_3a_1\cos\alpha_2) \\ a_2^2 & -p_2a_2^2 & p_2(a_2a_3\cos\alpha_1) \\ a_3^2 & p_3(a_2a_3\cos\alpha_1) & -p_3a_2^2 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(p_1+p_2+p_3)[a_1^2a_2^2a_3^2p_2p_3(1-\cos^2\alpha_1)+a_1a_2^3a_3^2p_3p_1(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\alpha_3) \\
&\quad +a_1a_2^2a_3^3p_1p_2(\cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)] \\
&=(p_1+p_2+p_3)[a_1^2a_2^2a_3^2P_2P_3\sin^2\alpha_1+a_1a_2^3a_3^2p_3p_1\sin\alpha_1\sin\alpha_2+a_1a_2^2a_3^3p_1p_2\sin\alpha_3\sin\alpha_1) \\
&=\frac{1}{4R^2}(p_1+p_2+p_3)a_1^2a_2^2a_3^2(a_1^2p_2p_3+a_2^2p_3p_1+a_3^2p_1p_2)\text{。}
\end{aligned}
$$

於是，點 P_1、P_2 與 P_3 共線的充要條件爲 $a_1^2p_2p_3+a_2^2p_3p_1+a_3^2p_1p_2=0$，亦即：點 P 在 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外接圓上。 ||

例 30 ：設 P 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外接圓上任意點， G 爲 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心。若點 Q 在直線 PG 上且 $\overrightarrow{PQ}=-3\overrightarrow{QG}$，試證：點 Q 在 $\Delta A_1A_2A_3$ 的九點圓上。

證：設點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的規範化面積坐標爲 $P(p_1:p_2:p_3)$， $p_1+p_2+p_3=1$。因爲重心 G 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的規範化面積坐標爲 $G(1/3:1/3:1/3)$，所以，依定理 5 ，可知 Q 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲

$$
Q(p_1-3(1/3):p_2-3(1/3):p_3-3(1/3))\text{ 或 }Q(p_2+p_3:p_3+p_1:p_1+p_2)
$$

將上述坐標代入九點圓的方程式，因爲點 $P(p_1:p_2:p_3)$ 在外接圓上，即 $a_1^2p_2p_3+a_2^2p_3p_1+a_3^2p_1p_2=0$，所以，得

$$
\begin{aligned}
&(a_2a_3\cos\alpha_1)(p_2+p_3)^2+(a_3a_1\cos\alpha_2)(p_3+p_1)^2+(a_1a_2\cos\alpha_3)(p_1+p_2)^2 \\
&-a_1^2(p_3+p_1)(p_1+p_2)-a_2^2(p_1+p_2)(p_2+p_3)-a_3^2(p_2+p_3)(p_3+p_1) \\
&=-2(a_1^2p_2p_3+a_2^2p_3p_1+a_3^2p_1p_2)=0\text{。}
\end{aligned}
$$

由此可知：點 Q 在九點圓上。 ||

參考資料

1.Eddy, R.H. 1990. A Generalization of Nagel's Middlespoint. El. Math., 45, 14.

2.Goggins, J.R. 1986. Perimeter Bisectors. Math. Gaz., 70, 133.

3.Guelicher, H. 1987. Problem E3231. Amer. Math. Monthly, 94, 876.

4.Johnson, R.A. 1969. Advanced Euclidean Geometry (Modern Geometry). Dover, New York.

5.Klamkin, M. & Liu, A. 1992. Simultaneous Generalizations of the Theorems of Ceva and Menelaus. Math. Mag., 65(1), 48.

6.Oldknow, A. 1996. Euler-Gergonne-Soddy Triangle of a Triangle. Amer. Math. Monthly, 319.

7.Sommerville, D.Y. 1924. Analytical Conics., G. Bell, London.