中學數學挑戰徵答題參考解答評析

通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 2006

設 $\langle a_n \rangle$ 爲一無窮數列，任意正整數 n，a_n 是 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的個位數字。證明：$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 是有理數。

解答：解法（一）：

證明：祇要證明 $\langle a_n \rangle$ 是一個周期數列即可。令 $S_k = 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2$，則 $S_k = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$，$k=1,2,3,\cdots$，逐項代入可得其個位數字分別爲 1,5,4,0,5,1,0,4,5,5,6,0,9,5,0,6,9,0,0,1,5,4,0,‧‧‧‧‧這個數列就是 $\langle a_n \rangle$，由此可推猜：$\langle a_n \rangle$ 爲周期爲 20 的周期數列。對此結論我們證明之。對任意正整數 n

$$S_{n+20} - S_n = \frac{(n+20)(n+21)(2n+41)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 10(2n^2+4n+287)$$

即當 $S_n = 10t + a_n$，$t=0$ 或正整數時

$$S_{n+20} = S_n + 10(2n^2+4n+287) = 10(t+2n^2+4n+287) + a_n$$

就得證 $a_{n+20} = a_n$，所以 $\langle a_n \rangle$ 爲以 20 爲最小周期的周期數列，也就是 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 爲循環節爲 20 的循環小數，所以它是個有理數。

解法（二）：（採自建中李國禎等之解法。）

$\because a_n \equiv 1^2+2^2+\cdots+n^2 \pmod{10}$

$$\begin{aligned}
\therefore a_2 - a_1 &\equiv 4 \pmod{10}\\
a_3 - a_2 &\equiv 9 \pmod{10}\\
a_4 - a_3 &\equiv 6 \pmod{10}\\
a_5 - a_4 &\equiv 5 \pmod{10}\\
a_6 - a_5 &\equiv 6 \pmod{10}\\
&\vdots\\
+)\ a_{11} - a_{10} &\equiv 1 \pmod{10}\\
\hline
a_{11} - a_1 &\equiv 5 \pmod{10}
\end{aligned}$$

$\because a_{k+1} - a_k$ 個位數字（$k=1,2,\cdots$），每 10 次循環一次

$\therefore a_{11} - a_1 \equiv 5 \pmod{10}$

$$\begin{array}{r} +)\, a_{21} - a_{11} \equiv 5 \pmod{10} \\ \hline a_{21} - a_1 \equiv 0 \pmod{10} \end{array}$$

同理可證 $a_{22} - a_2 \equiv 0 \pmod{10}$

$$a_{23} - a_3 \equiv 0 \pmod{10}$$

$$\vdots$$

$$a_{40} - a_{20} \equiv 0 \pmod{10}$$

又 a_n 爲 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的個位數字 $0 \le a_n < 10$，且 $a_{20+k} \equiv a_k \pmod{10}$，

故 $a_{20+k} \equiv a_k$，故 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n = 0.\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{20}}$ 爲一有理數。

解法（三）：（採自雄中蔡孟根等之解法。）

想法：觀察 $a_1, a_2, \cdots, a_{40}$，猜測 $0.a_1a_2\cdots a_n = 0.\overline{15405104556095065900}$

證明：

(i) $\because a \equiv a + 10k \pmod{10}$，$k \in Z$

$\therefore a^2 \equiv (a+10k)^2 \pmod{10}$

(ii) $\because 1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 =$

$\frac{1}{6} \times 10 \times (10+1) \times (2 \times 10 + 1) = 385 \equiv 5 \pmod{10}$ ....求 a_{10} 個位數字

$\therefore 11^2 + 12^2 + \cdots + 20^2 \equiv 1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 \equiv 5 \pmod{10}$

$\therefore 1^2 + 2^2 + \cdots 20^2 \equiv 5 + 5 \equiv 0 \pmod{10}$ ...利用(i)求 a_{20} 的個位

(iii)設 $k \in Z \cup \{0\}$，$t \in N$，$1 \le t \le 19$

$$\begin{aligned} a_{20k+t} &\equiv 1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2 + \cdots + (20k)^2 + (20k+1)^2 + \cdots + (20k+t)^2 \\ &\equiv (1^2 + 2^2 + \cdots 20^2) + (21^2 + \cdots 40^2) + \cdots + \\ &\qquad \left[(19k+1)^2 + \cdots + (20k)^2\right] + (1^2 + 2^2 + \cdots t^2) \text{ 利用(i)(ii)} \\ &\equiv 0 + 0 + \cdots + 0 + (1^2 + 2^2 + \cdots t^2) \equiv 1^2 + 2^2 + \cdots + t^2 \equiv a_t \pmod{10} \end{aligned}$$

即 $a_{20k+t} \equiv a_t \pmod{10}$

∴於 t=1,2,3,....,19 時，a_{20k+t} 與 a_t 有相同的個位數字

$$\begin{aligned} \therefore\ 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots &= 0.a_1a_2\cdots a_{20}a_{21}a_{22}\cdots a_{40}a_{41}\cdots a_n\cdots \\ &= 0.a_1a_2\cdots a_{20}a_1a_2\cdots a_{19}a_{20}a_1a_2\cdots a_{20}a_1\cdots a_n\cdots \\ &= 0.\overline{a_1a_2\cdots a_{19}a_{20}} \text{ 爲循環小數 （} \langle a_n \rangle \text{爲無窮數列）} \end{aligned}$$

即 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 爲有理數。

《解題重點》

1.有限小數或循環小數必爲有理數。

2.平方和通式 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 。

3.由 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 逐步找尋 $\langle a_k\rangle$ 的特性（循環性）再給予證明。

《評析》

1.本題配合高一基礎數學第一冊數列級數及有理數之題材設計，基本上難度不過，應屬於簡單題型，本次參與徵答人數計有北一女葉書蘋等 62 人（含鳳山國中學生朱浩瑋等 4 人），高一學生徵答人數最多（26 人），高二學生則有 25 人，應與本題知識領域範圍落在高一上學期的教材內容有關。

2.本題幾乎參與徵答者皆能切中問題核心，惟本題針對不能證出循環節是 20 位的最小值者扣 1 分，使得本題之得分率略受影響，僅達 0.75 而已。

3.本題解題品質較佳的高二同學計有建中蔡旭程、李國禎、鄧敦民、蘇漢強及雄中盧佑群等 5 人，高一學生則有武陵高中莊家霖及雄中蔡孟根等 2 人。

問題編號 2007

設 $f:R\to R$ 爲滿足下列條件的函數，

任意實數 x,y ， $f((x-y)^2)=(f(x))^2-2xf(y)+y^2$ 恆成立。

試找出所有滿足條件的函數 f 。

解答：（1）任意 x,y ，恆有 $f((x-y)^2)=(f(x))^2-2xf(y)+y^2\cdots\cdots(*)$

取 $y=0$ 時， $f(x^2)=(f(x))^2-2xf(0)$ ，任意 $x\cdots\cdots$①

①中取 $x=0$ 時， $f(0)=(f(0))^2$ ，所以 $f(0)=0$或1

（2）對(*)式而言，當 $x=y$ 時， $f(0)=(f(x))^2-2xf(x)+x^2=(f(x)-x)^2$

由(1)與(2)的結論可得：

(i)若 $f(0)=0$ 時，$f(x)-x=0$，即 $f(x)=x$ ，任意 x 都成立，此結論帶入(*)式，合條件。

(ii)若 $f(0)=1$時， $f(x)-x=\pm1$ ，即 $f(x)=x\pm1$ ，任意 x 都成立

如果 $f(x)=x-1$時，由①可知

$f(x^2)=x^2-1$ ， $(f(x))^2-2xf(0)=(x-1)^2-2x=x^2-4x+1$

當 x=0 時， $f(x^2)=(f(x))^2-2xf(0)$是矛盾的

所以 $f(x)=x-1$（不合條件）

如果 $f(x)=x+1$時，①式成立

(iii)將 $f(x)=x$，或$f(x)=x+1$代入原條件，經檢驗都符合，所以得到合條件的 $f(x)$ 恰好就是這兩個。

《解題重點》

1.將已知條件局部減化為 $f(x^2)=(f(x))^2-2xf(0)$，任意 x。

2.求 $f(0)$。

3. 取 $x=y$ 將已知條件轉化成 $(f(x)-x)^2=f(0)$ 求得 $f(x)$ 再檢驗刪除部分不合條件的 $f(x)$。

《評析》

1.本題配合代數（函數方程）主題設計，對本通訊解題研究小組而言是第一次的嘗試，難度預期適中，但屬新題型，參與徵答人數還不算少，計有武陵高中游志強等 45 人（含鳳山國中朱浩瑋），得分率 0.86，堪稱理想。

2.此題徵答學生幾乎可分成兩類。一類是正確的方法純粹以已知的 $f(x)$ 條件在 x，y 上動腦筋來解題，另一類則是錯誤的方法，先假設它是多次函數而判定出 $f(x)$ 為至多一次函數來解題。

3.原題的函數並未假定它是多項函數，高一的徵答者誤以為它是多項函數來解題，顯示對函數概念認知不足，有待加強。

4.部分徵答者得出 $f(x)=x$，或 $f(x)=x\pm1$ 後未說出檢驗過程而直接得到答案是會被扣分的，好的解題品質是要求檢驗的手續。

5.本題解題品質較佳的徵答者計有雄中姜宜桀（高二），武陵高中王嘉慶（高一）及劉俊緯（高三）等 3 人。

問題編號 2008	內切圓為單位圓的三角形中，試確定所有三邊長均為整數的三角形有那些。

解答： 1.設三角形的三邊長分別是 a，b，c 且 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$，當內切圓半徑為 r 且面積為 Δ 時，易知 $\Delta=rS$。

由海龍公式（ Heron's formula ）知 $\Delta=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ 且當 $r=1$ 時，得 $(S-a)(S-b)(S-c)=S\cdots\cdots(*)$。

2.當 a，b，c 為整數時，由(*)式可得

$$S^3-(a+b+c)S^2+(ab+bc+ca-1)S-abc=0$$

即 S 為三次式 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca-1)x-abc=0$ 的有理數解，由一次因式檢驗法知道，上述方程式的有理根必為整數，所以 S 必為整數，因此 $S-a$，$S-b$，$S-c$ 必為整數。

3.取 $S-a=x$，$S-b=y$，$S-c=z$ 時，$x+y+z=S$，所以(*)式可化為 $xyz=x+y+z$，

現在欲求此不定方程式的正整數解。不失一般性，令 $x \ge y \ge z$ 則 $\frac{1}{x} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{z}$，

由 $xyz = x+y+z$ 可得 $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1 \cdots\cdots$①

即可得 $\frac{3}{z^2} \ge 1$，所以 $z^2 \le 3$ 必然 $z=1$，這時候①式可化為 $\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$，

又可得 $\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y} \ge 1$，即 $y^2-2y-1 \le 0$，可得 $0<y<1+2\sqrt{2}<4$，

(i)當 $y=1$ 時，x 不存在

(ii)當 $y=2$ 時，$\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$，即 $x=3$。

(iii)當 $y=3$ 時，$\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}$，$x=2$（不合條件）。

所以 $x=3$，$y=2$，$z=1$ 為唯一的解，此時 $S=6$，$a=3$，$b=4$，$c=5$，

所以滿足條件的三角形是唯一的，其三邊長為 4，5，6。

《解題重點》

1.面積公式與內切圓半徑與三角形面積的關係。

2.整係數一次因式檢驗性質。

3.討論不定方程式的解。

《評析》

1.本題配合幾何與不定方程之代數題材設計，原屬較難題型，僅有雄中盧佑群等 33 人（含英明國中李東穎）參與徵答，惟得分率 0.85 為本次徵答五道題中最高的一題，應與徵答人數較少有關。

2.此題幾何題幾乎徵答學生都能完整解出，可見幾何題之訓練已有良好成效。

3.本題涉及簡易不定方程之技能，亦為本研究小組之首次嘗試，參與徵答者都能順利完成，顯示其自學能力頗強，數學教師應多予鼓勵學生研究課外讀物，對解題能力的增進有所助益。

問題編號 2009	試確定 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{86}^2=y^{1997}$ 是否有無窮多組 $x_1,x_2,\cdots,x_{86},y$ 的正整數解。

解答：解法（一）：

1.此不定方程組有無窮多組合條件的解。

2.證明：（構造法）

取 $p_1,p_2,\cdots,p_{86}$ 為 86 個互異的質數，令 $S=p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{86}^2$

且 $x_i = S^m \cdot p_i$，$i = 1,2,\cdots,86$，m爲某正整數（由 y 的指數而定）

則 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{86}^2 = S^{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \cdots + p_{86}^2) = S^{2m+1}$

當 $2m+1 = 1997$時，$m = 998$

取 $y = S$，則 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{86}^2 = y^{1997}$

因此 $(S^{998}p_1, S^{998}p_2, \cdots, S^{998}p_{86}, S)$ 爲方程式的解，又質數有無窮多，

所以本命題成立。

解法（二）：（採自鳳山國中朱浩瑋之解法。）

對於任意數 n ，n 爲正整數，則在 $y = n^2 + 1$時

$(n^2+1)^{1997} = (n^2+1)(n^2+1)^{1996} = n^2(n\ \ +1)^{1996} + (n^2+1)^{1996} = [n(n^2+1)^{998}]^2 + (n^2+1)^{1996}$

$[n(n^2+1)^{998}]^2$ 是完全平方數，設 $x_1 = n(n^2+1)^{998}$

$y^{1997} = x_1^2 + (n^2+1)^2(n^2+1)^{1994} = n^4(n^2+1)^{1994} + 2n^2(n^2+1)^{1994} + (n^2+1)^{1994} + x_1^2 =$

$[n^2(n^2+1)^{997}]^2 + 2[n(n^2+1)^{997}]^2 + (n^2+1)^{1994} + x_1^2$

$\therefore$ 將 $(n^2+1)^{1996}$ 分解，可分解成三個完全平方數的和與 $(n^2+1)^{1994}$

同理，$(n^2+1)^{1994}$ 亦可分解成三個完全平方數的和與 $(n^2+1)^{1992}$

照這種方法分解 27 次，可得到 82 個完全平方數和與 $(n^2+1)^{1942}$

$(n^2+1)^{1942}$ 可再分解爲三個平方數的和與 $(n^2+1)^{1940}$

$(n^2+1)^{1940} = [(n^2+1)^{970}]^2$ 也是一個完全平方數，82+3+1=86，

$\therefore (n^2+1)^{1997}$ 可分爲 86 個完全平方數和，n 爲任意正整數

即 $y = n^2+1$，必可找出 x_1，x_2，$x_3 \ldots\ldots\ x_{86}$，

使 $x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_{86}^2 = y^{1997}$

$\because$ 正整數 n 有無限多個，$\therefore$ 有無窮多組解。

《解題重點》

1.構造法：取 86 個質數 $p_1, p_2, \cdots, p_{86}$ 及其平方和 $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{86}^2$，令其爲 S。

2.取 $x_i = S^m \cdot p_i$ 可使 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{86}^2 = S^{2m+1}$ 形式可找到適當的整數 m，使 $2m+1 = 1997$，此時 $y = S$。

3.質數無窮多。

《評析》

1.本題亦爲不定方程代數題材，屬中偏難的題型，參與徵答者計有建中蘇漢強等 35 人（含鳳山國中朱浩瑋），惟得分率 0.78 仍略高於編號 2001 題，應與徵答人數較少有關。

2.建中蘇漢強的解法品質特佳，另外朱浩瑋的解法很特別，思考方式很自然，值得培養。

3.部分徵答者把 $x_1,x_2,\cdots,x_{86}$ 當做相同去解題，變得很簡易，如武陵高中游志強、黃世昌等，本題原先要求這些正整數兩兩互異，構造這些數就稍難了。

4.找 $x_1,x_2,\cdots,x_{86},y$ 無窮組正整數解，學生均能先找到一特解再求出一般解進而解釋無窮多組解。

問題編號 2010

在 n 列 n 行的 $n\times n$ 小正方格裡，填入-1 或 0 或 1 中的一個數。試確定所有 n 值能使填入各列各行的 n 個數的和共有 $2n$ 個，這 $2n$ 個和都不相等。

解答：設正整數 n 滿足已知條件，因為 n^2 個小正方格內所填的數 x，$|x|\le 1$，所以每列，每行的 n 個數的和不大於 n，且不小於 $-n$。

下面我們逐步分析討論。設 r_1，r_2，⋯，r_n，c_1，c_2，⋯，c_n 表各列各行的數的和。

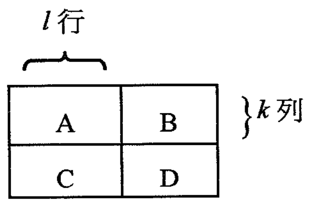
（1）不失一般性，我們可將 $n\times n$ 方陣的各列互調，所得的結果，n 列的的各列數的和，只有次序互調，而不更動和的數值與個數，同樣地可將各行互調，最後調整到一個結果：

$r_1>r_2>\cdots>r_n$ 且 $c_1>c_2>\cdots>c_n$，

又設 $r_1>r_2>\cdots>r_k>0$ 且 $0\ge r_{k+1}>r_{k+2}>\cdots>r_n$

$c_1>c_2>\cdots>c_l>0$ 且 $0\ge c_{l+1}>c_{l+2}>\cdots>c_n$

因此，我們可將 $n\times n$ 方陣依下表所示分割成四塊，



令 $r_1+r_2+\cdots+r_k=a+b$，$r_{k+1}+r_{k+2}+\cdots+r_n=c+d$

其中 a，b，c，d 表示分割出來的矩陣內的數的和。

（2）已知 c_1，c_2，⋯，c_n，r_1，r_2，⋯，r_n 為區間 $[-n,n]$ 內 $2n+1$ 個整數中，$2n$ 個不同的整數，設 s 為唯一不在 $[-n,n]$ 區間內的整數，不妨設 $s\le 0$，因為 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 與 $c_1,c_2,\cdots,c_l$ 均為 r_i，c_j 中的正數，$1\le i$，$j\le n$ 所以 $k+l=n$ 且

$$\sum_{i=1}^{k}r_i+\sum_{j=1}^{l}c_j=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ \cdots\cdots①，且$$

$$\sum_{i=k+1}^{n}r_i+\sum_{j=l+1}^{n}c_j\le 0+(-1)+(-2)+\cdots+[-(n-1)]=\frac{-n(n-1)}{2}\ \cdots\cdots②，$$

以$\sum_{(+)}$與$\sum_{(-)}$分別表①，②兩式的左式，

那麼$\sum_{(+)}-\sum_{(-)}=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n-1)}{2}=n^2$……③

（3）由上面的圖表可知$\sum_{(+)}=a+c+a+b=2a+b+c$

$\sum_{(-)}=b+d+c+d=b+c+2d$，因此$\sum_{(+)}-\sum_{(-)}=2(a-d)$，但$a$的最大值不超過$kl$，且$d$的最小值不小於$-(n-k)(n-l)=-lk$，

所以$\sum_{(+)}-\sum_{(-)}=2(a-d)\le 2(kl+kl)=4kl$……④

（4）由③與④結果，得$n^2\le 4kl=4k(n-k)$，因此，$n^2-4kn+4k^2\le 0$，所以$(n-2k)^2\le 0$……⑤，祇有在$n=2k$時，⑤式成立，因此當 n 爲奇數時，不可能造出合條件的方陣。

（5）我們必定確定是否n爲偶數時，均可造出合條件的方陣，首先當$n=2$時，如下圖（一）所示顯然滿足條件

1	-1	0
1	0	1
2	1	

圖（一）

當 n 爲偶數且大於 2 時，如下圖（二），構造法則

1	-1	-1	-1	-1	-1	....	-1	-1
1	0	-1	-1	-1	-1	....	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	....	-1	-1
1	1	1	0	-1	-1	....	-1	-1
1	1	1	1	1	..	....	-1	-1
1	1	1	..	..	..	....	-1	-1
1	1	1	..	..	..	....	-1	-1
1	1	1	..	..	..	....	-1	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
.	.	.	.	.	.	....	1	-1
1	1	1	1	1	1	....	1	0

圖（二）

1.主對角線的位置由左上角往右下角塡入 1,0,1,0,1,0,……,1,0 。

2.在主對角線下方的各小方格塡入 1 。

3.在主對角線上方的各小方格填入 -1。

由上面三個構造法則，易知

① $n=c_1>c_2>\cdots>c_n$ 且 $r_1<r_2<\cdots<r_n$

② $c_1-c_3=c_3-c_5=\cdots=c_{n-3}-c_{n-1}=c_2-c_4=c_4-c_6=\cdots=c_{n-2}-c_n=4$

$r_1-r_3=r_3-r_5=\cdots=r_{n-3}-r_{n-1}=r_2-r_4=r_4-r_6=\cdots=r_{n-2}-r_n=-4$

③ $c_1=n$，$c_2=n-3$，$r_1=-(n-2)$，$r_2=-(n-3)$，因此 c_i 與 n 或 $n+1$（模 4）同餘，r_j 與 $n+2$ 或 $n+3$（模 4）同餘，$1\le i$，$j\le n$，所以均不相同，對 $1\le i$，$j\le n$，正合已知條件。

《解題重點》

1.一個方陣各行各列互調時，各行與各列的和改變，但和的個數與值不變。

2.將方陣排列成各行與各列的和爲遞減數列的方陣，討論行列元素和的範圍。

3.從 $n=2$，$n=4$ 構造滿足條件的方陣，並找其規律作爲證明的基礎。

《評析》

1.本題屬於組合數學的題材，跟校內數學教材相關性較低，屬難度高的題型，參與本題徵答學生數最少，僅有宜蘭高中游家瑋等 13 人，且僅有 7 人高二學生，得分率 0.65 爲此次五道題中最低。

2.此題徵答學生最少本在意料之中，但沒想到比原先預料還少，可能本期恰逢學校舉行段考有關。

3.參與徵答者均能在 n 是偶數時找到排列方法，但 n 是奇數大多無法給出不能排之證明。

4.本題解題品質較佳者計有宜蘭高中游家瑋及武陵高中陳志榕等 2 人。

評註：

1.本次徵答統計簡表如下：

總人數　68 人	問題編號	2006	2007	2008	2009	2010
	得分	317	242	190	186	59
	徵答人數	58	44	32	34	13
	得分率	0.78	0.79	0.85	0.78	0.65
一年級　31 人	得分	136	60	53	47	7
	徵答人數	26	13	8	7	1
	得分率	0.75	0.66	0.95	0.96	1.00
二年級　29 人	得分	142	134	97	99	27
	徵答人數	25	23	18	21	7

	得分率	0.81	0.83	0.77	0.67	0.55
三年級　8人	得分	39	48	40	40	25
	徵答人數	7	8	6	6	5
	得分率	0.80	0.86	0.95	0.95	0.71
參與徵答總校數：14所 計：　計畫內：10所，非計畫內：4所						

2.本期五題中除了編號 2010 最後一道外，預估難度適中，但徵答人數不如預期的多，正如上一年度第 2 期（編號 1006~1010）一樣，跟學校舉行段考及校內科展撞期，影響參與徵答頗大，例如經常參與徵答的嘉義高中本期缺席了！

3.本期答題成績優異的學生計有建中蔡旭程、李國禎；台師大附中林建位、王世豪、陳正傑；宜蘭高中游家瑋；武陵高中陳志榕、游志強、黃彥穎、黃世昌；雄中廖英傑、盧佑群、林耕賢等 13 人。

4.學生心得感言摘錄如下：

①雖然日期已經截止，但仍然希望您幫我批改一下，希望您不會困擾，謝謝！以後發表題目的日期（在網路上）是否能提早一點，不然最近都沒收到月刊，不知道題目，謝謝！（雄中，盧佑群。）

（注：第 202 期開始的月刊由新的出版商得標，由於工作經驗的關係，這三期都沒能如期出版，我們會依你的意見處理，提早在網路上發布。）

②有些題目（編號 2006）看起來不好著手，其實"觀察"一下，便能找出解題方向，進而尋求結果。本題尙屬簡單。（雄中，蔡孟根。）

③老實說編號 2006 題沒什麼技巧！（暴力法）。（雄中，余倉緯。）

④當我拿此題（編號 2006 題），若一無窮小數爲有理數則其必可化成分數形，而聯想到循環小數在分析題目時，先用電腦寫了個小程式算 $a_1 \cdots a_n$ 相當容易的發現了以 20 組爲一規律而做更進一步的解題。（雄中，陳育成。）

⑤一看到題目（編號 2007 題）似乎有些複雜，沒想到一下子就解出來了，真是難以言喻的高興。（中一中，譚國棟。）

⑥編號 2007 題可能少寫許多答案。（雄中，李奇育。）

（注：解題中假設它是多項函數，造成你的不安全感是很自然的，不過本題結果恰好是跟你的答案完全一樣，當然你的方法還是錯的。）

⑦由於星期一才拿到題目，星期六就到期了，再加上這個星期比較忙，所以沒辦法一直的想這些題目。又因爲我的程度可能還不夠，因此編號 2010 題沒有完全解出。它好難喔！應該有比較簡單的方法吧！（台師大附中，林建位。）