中學數學挑戰徵答題

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

♠*本期徵答截止日期：民國 87 年 1 月 16 日；相關參考解答將刊於科學教育月刊第 207 期*

問題編號 2016

試找出所有滿足下列聯立方程組的實數解 x_1，x_2，…，x_n：

$$\begin{cases} x_1+\log(x_1+\sqrt{x_1^{\ 2}+1})=x_2 \\ x_2+\log(x_2+\sqrt{x_2^{\ 2}+1})=x_3 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}+\log(x_{n-1}+\sqrt{x_{n-1}^{\ 2}+1})=x_n \\ x_n+\log(x_n+\sqrt{x_n^{\ 2}+1})=x_1 \end{cases}$$

問題編號 2017

圓周上有互異的 15 點。今選擇紅、藍、綠、黃四種顏色中之一色對此 15 點著色，規定：若某點著了紅色或藍色時，則此點順時針方向後的第 1 點和第 8 點不可著藍色也不可著綠色；若某點著了黃色或綠色時，則此點順時針方向後的第 1 點和第 8 點不可著紅色也不可著黃色。試確定這 15 點所有可能著色結果。

問題編號 2018

在邊長爲 2 的正方體任取互異的 1998 個點。今以正方體中心爲起點，這 1998 個點爲終點做出 1998 空間向量 v_1，v_2，…，v_{1998}，試證可找到一組實數 a_1，a_2，…，a_{1998}，其中 $a_i=1$或-1，$(i=1,2,\ldots,1998)$，使得 $\left|\sum_{i=1}^{1998}a_iv_i\right|\le\sqrt{12}$。

問題編號 2019

試確定 $f(x)=x^{1998}+7x^{1997}+5$ 能否表示成兩個次數都是至少一次的整數係數多項式的乘積？

問題編號 2020

設 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 且 $g_n(x)=x+f(x)+f(f(x))+\cdots+\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n\text{個}f}$，

其中 n 是自然數，$x>0$。試證明：

(i)若 $x>y>0$，則$g_n(x)>g_n(y)$。

(i)對所有 $n\ge1$，$g_n(1)=\dfrac{F_1}{F_2}+\dfrac{F_2}{F_3}+\cdots+\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$，其中 $F_1=F_2=1$，

且 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$。