三線性坐標與面積坐標(四)

趙文敏
國立臺灣師範大學　數學系

下面的定理，我們討論兩直線垂直的條件。

定理 12（兩直線垂直的條件）

設△ $A_1A_2A_3$ 爲任意三角形，其三邊長爲 a_1、a_2與a_3，三內角爲 α_1、α_2與α_3。

(1)在以△ $A_1A_2A_3$ 爲參考三角形的面積坐標系中，兩直線

$$L_1：h_1\mu_1+h_2\mu_2+h_3\mu_3=0 \text{ 與 } L_2：k_1\mu_1+k_2\mu_2+k_3\mu_3=0$$

垂直的充要條件是：

$$\begin{aligned}&a_1^2h_1k_1+a_2^2h_2k_2+a_3^2h_3k_3-a_2a_3(h_2k_3+h_3k_2)\cos\alpha_1\\&-a_3a_1(h_3k_1+h_1k_3)\cos\alpha_2-a_1a_2(h_1k_2+h_2k_1)\cos\alpha_3=0。\end{aligned}$$

(2)在以△ $A_1A_2A_3$ 爲參考三角形的三線性坐標系中，兩直線

$$L_1：h_1v_1+h_2v_2+h_3v_3=0 \text{ 與 } L_2：k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$$

垂直的充要條件是：

$$\begin{aligned}&h_1k_1+h_2k_2+h_3k_3-(h_2k_3+h_3k_2)\cos\alpha_1\\&-(h_3k_1+h_1k_3)\cos\alpha_2-(h_1k_2+h_2k_1)\cos\alpha_3=0。\end{aligned}$$

證：(1)在△ $A_1A_2A_3$ 的平面上任選一個直角坐標系，設三頂點的直角坐標分別爲 $A_1(x_1,y_1)$、$A_2(x_2,y_2)$與 $A_3(x_3,y_3)$。若點 P 爲直線 L_1 上任意一點，其直角坐標爲 $P(x,y)$。依定理 4，我們可由點 A_1、A_2、A_3與 P 的直角坐標表出點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的面積坐標，，再代入 L_1 的齊次方程式，即得

$$h_1\begin{vmatrix}x_2-x & x_3-x\\ y_2-y & y_3-y\end{vmatrix}+h_2\begin{vmatrix}x_3-x & x_1-x\\ y_3-y & y_1-y\end{vmatrix}+h_3\begin{vmatrix}x_1-x & x_2-x\\ y_1-y & y_2-y\end{vmatrix}=0,$$

展開、化簡，即得直線 L_1 的直角坐標方程式如下：

$$\begin{aligned}&(h_1(y_2-y_3)+h_2(y_3-y_1)+h_3(y_1-y_2))x-(h_1(x_2-x_3)+h_2(x_3-x_1)+h_3(x_1-x_2))y\\&+h_1(x_2y_3-x_3y_2)+h_2(x_3y_1-x_1y_3)+h_3(x_1y_2-x_2y_1)=0。\end{aligned}$$

同理，可得直線 L_2 的直角坐標方程式如下：

$$\begin{aligned}&(k_1(y_2-y_3)+k_2(y_3-y_1)+k_3(y_1-y_2))x-(k_1(x_2-x_3)+k_2(x_3-x_1)+k_3(x_1-x_2))y\\&+k_1(x_2y_3-x_3y_2)+k_2(x_3y_1-x_1y_3)+k_3(x_1y_2-x_2y_1)=0。\end{aligned}$$

於是，可得

直線 L_1 與 L_2 垂直

$$\Leftrightarrow (h_1(y_2-y_3)+h_2(y_3-y_1)+h_3(y_1-y_2))(k_1(y_2-y_3)+k_2(y_3-y_1)+k_3(y_1-y_2))+(h_1(x_2-x_3)+h_2(x_3-x_1)+h_3(x_1-x_2))(k_1(x_2-x_3)+k_2(x_3-x_1)+k_3(x_1-x_2))=0$$

$$\Leftrightarrow h_1k_1((x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2)+h_2k_2((x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2)+h_3k_3((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)+(h_2k_3+h_3k_2)((x_3-x_1)(x_1-x_2)+(y_3-y_1)(y_1-y_2))+(h_3k_1+h_1k_3)((x_1-x_2)(x_2-x_3)+(y_1-y_2)(y_2-y_3))+(h_1k_2+h_2k_1)((x_2-x_3)(x_3-x_1)+(y_2-y_3)(y_3-y_1))=0$$

$$\Leftrightarrow a_1^2h_1k_1+a_2^2h_2k_2+a_3^2h_3k_3-a_2a_3(h_2k_3+h_3k_2)\cos\alpha_1-a_3a_1(h_3k_1+h_1k_3)\cos\alpha_2-a_1a_2(h_1k_2+h_2k_1)\cos\alpha_3=0。$$

這就是欲證的結果。請注意：在前述證明中，我們引用了直角坐標系的距離公式與內積公式：$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=\overline{A_2A_3}^2=a_1^2$；$(x_3-x_1)(x_2-x_1)+(y_3-y_1)(y_2-y_1)$ 等於向量 $\overrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 的內積，其值又等於 $\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_2}\cdot\cos\angle A_3A_1A_2=a_2a_3\cos\alpha_1$。

(2)由前面的(1)及定理 1(1)立即可得。∥

例 22：在不等邊三角形△ $A_1A_2A_3$ 中，內心與 Gergonne 點的連線必與 Gergonne 線垂直。△ $A_1A_2A_3$ 的內心與 Gergonne 點的連線稱爲△ $A_1A_2A_3$ 的 Soddy 線。

解：Gergonne 點與內心對△ $A_1A_2A_3$ 的面積坐標分別爲 $((s-a_1)^{-1}:(s-a_2)^{-1}:(s-a_3)^{-1})$ 與 $(a_1:a_2:a_3)$。令 $d_1=a_1^{-1}(s-a_1)^{-1}$、$d_2=a_2^{-1}(s-a_2)^{-1}$、$d_3=a_3^{-1}(s-a_3)^{-1}$，則 Gergonne 點與內心的連線對△ $A_1A_2A_3$ 的面積坐標方程式爲

$$\frac{1}{a_1}(d_3-d_2)\mu_1+\frac{1}{a_2}(d_1-d_3)\mu_2+\frac{1}{a_3}(d_2-d_1)\mu_3=0，$$

而依例 20，Gergonne 線對△ $A_1A_2A_3$ 的面積坐標方程式爲

$$\frac{1}{a_1d_1}\mu_1+\frac{1}{a_2d_2}\mu_2+\frac{1}{a_3d_3}\mu_3=0。$$

將兩方程式的係數代入定理 12(1)的條件等式左端，即得

$$\frac{d_3-d_2}{d_1}+\frac{d_1-d_3}{d_2}+\frac{d_2-d_1}{d_3}-\left(\frac{d_2-d_1}{d_2}+\frac{d_1-d_3}{d_3}\right)\cos\alpha_1-\left(\frac{d_3-d_2}{d_3}+\frac{d_2-d_1}{d_1}\right)\cos\alpha_2-\left(\frac{d_1-d_3}{d_1}+\frac{d_3-d_2}{d_2}\right)\cos\alpha_3$$

$$=\frac{d_3}{d_1}(1+\cos\alpha_3)-\frac{d_2}{d_1}(1+\cos\alpha_2)+\frac{d_1}{d_2}(1+\cos\alpha_1)-\frac{d_3}{d_2}(1+\cos\alpha_3)+\frac{d_2}{d_3}(1+\cos\alpha_2)$$
$$-\frac{d_1}{d_3}(1+\cos\alpha_1)$$
$$=\frac{d_3}{d_1}\frac{4s(s-a_3)}{2a_1a_2}-\frac{d_2}{d_1}\frac{4s(s-a_2)}{2a_3a_1}+\frac{d_1}{d_2}\frac{4s(s-a_1)}{2a_2a_3}-\frac{d_3}{d_2}\frac{4s(s-a_3)}{2a_1a_2}+\frac{d_2}{d_3}\frac{4s(s-a_2)}{2a_3a_1}-\frac{d_1}{d_3}\frac{4s(s-a_1)}{2a_2a_3}$$
$$=\frac{1}{d_1}\cdot\frac{2s}{a_1a_2a_3}-\frac{1}{d_1}\cdot\frac{2s}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{d_2}\cdot\frac{2s}{a_1a_2a_3}-\frac{1}{d_2}\cdot\frac{2s}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{d_3}\cdot\frac{2s}{a_1a_2a_3}-\frac{1}{d_3}\cdot\frac{2s}{a_1a_2a_3}$$
$$=0。$$

依定理 12(1)，上述兩直線垂直。 ||

例 22 中所提的 Soddy 線，線上另有兩個與△ $A_1A_2A_3$ 特殊相關的點，我們說明如下：以△ $A_1A_2A_3$ 的三個頂點 A_1、A_2 與 A_3 爲圓心，半徑分別爲 $s-a_1$、$s-a_2$ 與 $s-a_3$ 作三圓，此三圓必兩兩外切。對這三個圓，我們提出一個問題：能不能作出一個圓使它與上述三個圓都相切？答案是：此種圓有兩個，它們分別稱爲△ $A_1A_2A_3$ 的內 Soddy 圓(inner Soddy circle)與外 Soddy 圓(outer Soddy circle)，此兩圓的圓心都在 Soddy 線上。另外， Soddy 線與 Gergonne 線的交點，稱爲△ $A_1A_2A_3$ 的 Fletcher 點。

丁、等角共軛點與等距共軛點

定義 3：

(1)給定一個角 $\angle XOY$ 以及過點 O 的一直線 L，恰有一直線 L'，使得 L 與 L' 之交角的一條分角線也是 $\angle XOY$ 的分角線，則稱直線 L' 是直線 L 對於 $\angle XOY$ 的等角共軛線(isogonal conjugate line)。

(2)給定一個三角形△ $A_1A_2A_3$ 以及同平面上一點 P。若有一點 Q，使得：對於 i=1,2,3，直線 AiP 對於內角∠ Ai 的等角共軛線都通過 Q 點，則點 Q 稱爲點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的等角共軛點(isogonal conjugate point)。

定理 13（等角共軛線的基本性質）

設△ $A_1A_2A_3$ 爲任意三角形，P 爲同平面上一點，$P\neq A_1$。

(1)若點 P 在直線 A_1A_2 上，則直線 A_1P 對 $\angle A_2A_1A_3$ 的等角共軛線爲直線 A_1A_3。

(2)若點 P 在 $\angle A_2A_1A_3$ 或其外角的分角線上，則直線 A_1P 對 $\angle A_2A_1A_3$ 的等角共軛線爲其本身。

(3)若直線 A_1P 對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標方程式爲 $sv_2-tv_3=0$ 且 $st\neq 0$，則其對 $\angle A_2A_1A_3$ 的等角共軛線對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標方程式爲 $s^{-1}v_2-t^{-1}v_3=0$。

證：(1)與(2)顯然成立。

(3)先設直線 A_1P 與直線 A_2A_3 交於一點 B_1 ，則點 B_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標爲 $B(0{:}t{:}s)$。於是，點 B_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲$(0{:}a_2t{:}a_3s)$。在點 B_1 存在的情形下，我們還需分別考慮直線 A_1P 對 $\angle A_2A_1A_3$ 的等角共軛線與直線 A_2A_3 交於一點 C_1 或平行兩種情形，設等角共軛線與直線 A_2A_3 交於一點 C_1，如圖 17(1)所示。因爲直線 A_1B_1 與 A_1C_1 對於 $\angle A_3A_1A_2$ 的分角線成對稱，所以，$\angle A_2A_1C_1 = \angle B_1A_1A_3$ 且 $\angle C_1A_1A_3 = \angle A_2A_1B_1$ 。於是，點 B_1 與 C_1 同爲 $\overline{A_2A_3}$ 的內分點或同爲 $\overline{A_2A_3}$ 的外分點。設點 C_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標爲 $C_1(0{:}p{:}q)$ ，則點 C_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲 $(0{:}a_2p{:}a_3q)$ 。因爲 B_1 與 C_1 同爲內分點或同爲外分點，而且 $st \neq 0$ ，所以，可知 $pq \neq 0$ 而且 p/q 與 t/s 同號。

另一方面，依面積坐標的定義，可知

$$\left|\frac{a_2p}{a_3q}\right| = \frac{\Delta C_1A_1A_3}{\Delta C_1A_1A_2} = \frac{\overline{A_1A_3}\sin\angle C_1A_1A_3}{\overline{A_1A_2}\sin\angle A_2A_1C_1}$$

$$= \frac{\overline{A_1A_3}^2}{\overline{A_1A_2}^2}\cdot\ \frac{\overline{A_1A_2}\sin\angle A_2A_1B_1}{\overline{A_1A_3}\sin\angle B_1A_1A_3} = \frac{a_2^2}{a_3^2}\cdot\ \frac{\Delta A_2A_1B_1}{\Delta B_1A_1A_3} = \frac{a_2^2}{a_3^2}\cdot\ \left|\frac{a_3s}{a_2t}\right|$$

由此得 $p/q = s/t$ 或 $pt = qs$ ，亦即：點 C_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標爲 $C_1(0{:}s{:}t)$ ，而直線 A_1P 的等角共軛線 A_1C_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標方程式爲 $s^{-1}v_2 - t^{-1}v_3 = 0$ 。若直線 A_1P 的等角共軛線與直線 A_2A_3 平行，如圖 17(2)所示，則依定理 9(2)，可知等角共軛線對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標方程式爲 $a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ ，我們需證明 $t/s = -a_2/a_3$。在等角共軛線上選取一點 Q ，使得 $\angle B_1A_1A_3 = \angle QA_1A_2$ 且 $\angle B_1A_1A_2 = \angle QA_1A_3$ 。因爲 $\overline{A_1Q}\,/\!/\,\overline{A_2A_3}$ ，所以，點 Q 及點 B_1 都在 $\angle A_2A_1A_3$ 的外部。於是， $t/s<0$ ，而且

$$\frac{a_2t}{a_3s} = -\frac{\Delta B_1A_1A_3}{\Delta A_2A_1B_1} = -\frac{\overline{A_1A_3}\sin\angle B_1A_1A_3}{\overline{A_1A_2}\sin\angle A_2A_1B_1}$$

$$= -\frac{\overline{A_1A_3}^2}{\overline{A_1A_2}^2}\cdot\frac{\overline{A_1A_2}\sin\angle QA_1A_2}{\overline{A_1A_3}\sin\angle QA_1A_3} = -\frac{a_2^2}{a_3^2}\ 。$$

由此得 $t/s = -a_2/a_3$。請注意：在上式中，$\overline{A_1A_2}\sin\angle QA_1A_2$ 與 $\overline{A_1A_3}\sin\angle QA_1A_3$ 都等於平行線 A_1Q 與 A_2A_3 間的距離。

其次，設直線 A_1P 與 A_2A_3 平行。若直線 A_1P 對 $\angle A_2A_1A_3$ 的等角共軛線與直線 A_2A_3 交於一點 C_1 ，且點 C_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標爲 $C_1(0{:}p{:}q)$ ，則直線 A_1C_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標方程式爲 $qv_2 - pv_3 = 0$ 。因爲點 P 不在直線 A_1A_2 及 A_1A_3 上，所以，$C_1 \neq A_2$ 且 $C_1 \neq A_3$ 。於是， $pq \neq 0$ 。因爲直線 A_1P 是直線 A_1C_1 對 $\angle A_2A_1A_3$ 的等角共軛線，而 $\overline{A_1P}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 平行，所以，依前段證明的後半部分，可知直線 A_1P 對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標方程式爲 $q^{-1}v_2 - p^{-1}v_3 = 0$ 。再依定理的假設，可知 $q^{-1}/p^{-1} = s/t$ 或 $pt = qs$ ，亦即：等角共軛線 A_1C_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標方程式爲 $s^{-1}v_2 - t^{-1}v_3 = 0$ 。若直線 A_1P 及其對 $\angle A_2A_1A_3$ 的等角共軛線都與直線 A_2A_3 平行，則直

線 A_1P 及其對 $\angle A_2A_1A_3$ 的等角共軛線重合，因而此直線是 $\angle A_2A_1A_3$ 的外角的分角線。由外角的分角線與其對邊平行可知 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_1A_3}$ 或 $a_2=a_3$，而直線 A_1P 對△ $A_1A_2A_3$ 的三線性坐標方程式爲 $a_2v_2+a_3v_3=0$ 或 $v_2+v_3=0$ 。於是， $s/t=-1, s^{-1}/t^{-1}=-1$ ，即定理的結論也成立。 ‖

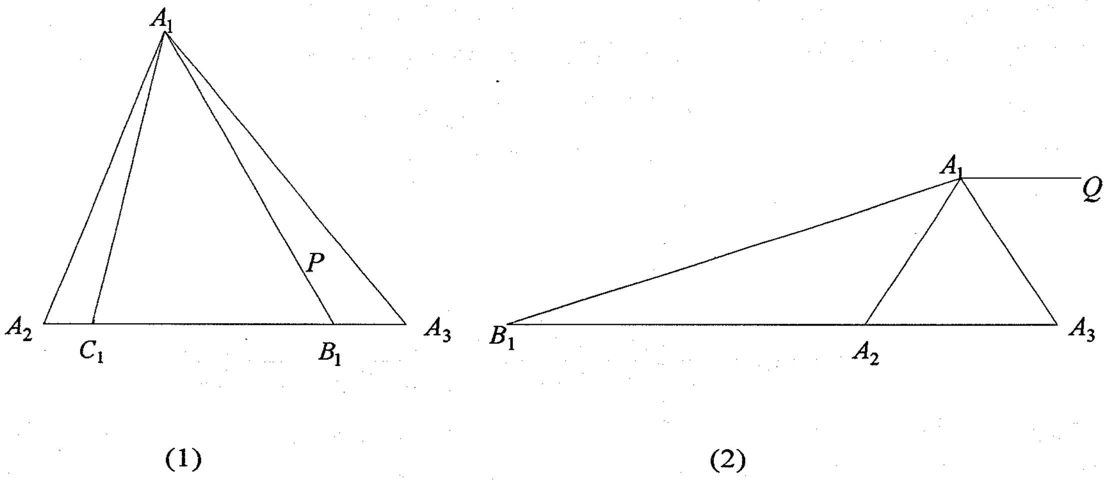

圖 17

定理 14（等角共軛點的基本性質）

設 $\Delta A_1A_2A_3$ 爲任意三角形，點 P 爲同平面上一點，且點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三線性坐標爲 $P(p_1:p_2:p_3)$ 。

(1)若點 P 在直線 A_2A_3 上，但 $P\neq A_2$、$P\neq A_3$，則點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的等角共軛點爲頂點 A_1。

(2)若 $p_1p_2p_3\neq 0$ 且 $a_1p_1^{-1}+a_2p_2^{-1}+a_3p_3^{-1}\neq 0$ ，則點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 有等角共軛點，而且它對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三線性坐標爲 $(p_1^{-1}:p_2^{-1}:p_3^{-1})$ 。

證：(1)依定理 13(1)立即可得

(2)因爲點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三線性坐標爲 $P(p_1:p_2:p_3)$ ，所以，直線 A_1P 、 A_2P 與 A_3P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三線性坐標方程式分別爲 $p_3v_2-p_2v_3=0$、$p_3v_1-p_1v_3=0$ 與 $p_2v_1-p_1v_2=0$ 。將三直線 A_1P 、 A_2P 與 A_3P 分別對內角 $\angle A_2A_1A_3$ 、 $\angle A_1A_2A_3$ 、 $\angle A_1A_3A_2$ 求等角共軛線，依定理 13(3)，所得三等角共軛線對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標方程式分別爲 $p_3^{-1}v_2-p_2^{-1}v_3=0$、$p_3^{-1}v_1-p_1^{-1}v_3=0$ 與 $p_2^{-1}v_1-p_1^{-1}v_2=0$。因爲 $a_1p_1^{-1}+a_2p_2^{-1}+a_3p_3^{-1}\neq 0$，所以，依定理 9(2)，可知此三直線兩兩都相交。將方程式聯立求解，即知此三直線共點，其交點對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三線性坐標爲 $(p_1^{-1}:p_2^{-1}:p_3^{-1})$ ，是點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的等角共軛點。 ‖

在定理 14(2)中，當點 P 的三線性坐標 $P(p_1:p_2:p_3)$ 滿足 $p_1p_2p_3\neq 0$ 但

$a_1p_1^{-1}+a_2p_2^{-1}+a_3p_3^{-1}=0$時，點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 沒有等角共軛點，因爲由直線 A_1P、A_2P 與 A_3P 所得的三等角共軛線兩兩平行。那些點 $P(p_1:p_2:p_3)$ 會滿足 $p_1p_2p_3\neq 0$ 且 $a_1p_1^{-1}+a_2p_2^{-1}+a_3p_3^{-1}=0$ 呢？這些點都在二次方程式 $a_1v_2v_3+a_2v_3v_1+a_3v_1v_2=0$ 的圖形上，此圖形乃是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外接圓（參看例 25）。

例 23 ：在任意三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 中，內心及三個旁心對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的等角共軛點都是其本身；外心對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的等角共軛點是垂心；當 $\Delta A_1A_2A_3$ 不是直角三角形時，垂心對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的等角共軛點是外心；不過，當 $\Delta A_1A_2A_3$ 是直角三角形時，垂心對 $\Delta A_1A_2A_3$ 沒有等角共軛點。值得一提的一個問題是：重心對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的等角共軛點是另一個具備有趣性質的點，稱爲 $\Delta A_1A_2A_3$ 的類似重心(symmedian point)，它對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三線性坐標是 $(a_1:a_2:a_3)$。 ||

在下面的定義中，我們介紹一個與等角共軛類似的概念。

定義 4 ：

(1)給定一線段 $\overline{MN}$ 以及直線 MN 上一點 P，恰有一點 Q 使得 $\overline{PQ}$ 的中點也是 $\overline{MN}$ 的中點，則稱點 Q 是點 P 對於 $\overline{MN}$ 的等距共軛點(isotomic conjugate point)。

(2)給定一個三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 以及同平面上一點 P 。若有一點 Q 使得下述性質成立：對於 i=1,2,3 ，直線 A_iP 與直線 A_iA_{i+1} 相交於一點 B_i ， B_i 對 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的等距共軛點爲 C_i ，直線 A_iC_i 恆過點 Q （此處 $A_4=A_1$、$A_5=A_2$ ），則點 Q 稱爲點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的等距共軛點(isotomic conjugate point)。

定理 15（等距共軛點的基本性質）

設 $\Delta A_1A_2A_3$ 爲任意三角形， P 爲同平面上一點，且 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲 $P(p_1:p_2:p_3)$。

(1)若點 P 在直線 A_2A_3 上，但 $P\neq A_2$、$P\neq A_3$，則點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的等距共軛點爲頂點 A_1。

(2)若 $p_1p_2p_3\neq 0$、$p_2+p_3\neq 0$、$p_3+p_1\neq 0$、$p_1+p_2\neq 0$ 且 $p_1^{-1}+p_2^{-1}+p_3^{-1}\neq 0$ ，則點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 有等距共軛點，而且它對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲 $(p_1^{-1}:p_2^{-1}:p_3^{-1})$。

證：(1)由定義立即可得。

(2)因爲直線 A_1P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標方程式爲 $p_3\mu_2-p_2\mu_3=0$ 而且 $p_2+p_3\neq 0$ ，所以， $\overline{A_1P}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 不平行。設直線 A_1P 與直線 A_2A_3 相交於點 B_1 ，點 B_1 對 $\overline{A_2A_3}$ 的等距共軛點爲 C_1 。因爲點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲 $P(p_1:p_2:p_3)$ ，所以，點 B_1 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲 $B_1(0:p_2:p_3)$ 。於是，向量 $\overrightarrow{A_3B_1}$ 與 $\overrightarrow{B_1A_2}$ 滿足 $p_3\overrightarrow{B_1A_3}-p_2\overrightarrow{A_2B_1}=0$ 。因爲點 C_1 與點 B_1 對於 $\overline{A_3A_3}$ 的中點成對稱，所以， $\overrightarrow{A_2C_1}=\overrightarrow{B_1A_3}$ 且

$\overrightarrow{C_1A_3}=\overrightarrow{A_2B_1}$。於是，得 $p_3\overrightarrow{A_2C_1}-p_2\overrightarrow{C_1A_3}=0$。由此知點 C_1 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲 $C_1(0:p_2^{-1}:p_3^{-1})$。直線 A_1C_1 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標方程式爲 $p_3^{-1}\mu_2-p_2^{-1}\mu_3=0$。同理，考慮直線 A_2P 與 A_3P，兩直線分別交直線 A_3A_1 與 A_1A_2 於點 B_2 與 B_3，兩個點分別對 $\overline{A_3A_1}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 求等距共軛點 C_2 與 C_3，則直線 A_2C_2 與 A_3C_3 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標方程式分別爲 $p_3^{-1}\mu_1-p_1^{-1}\mu_3=0$ 與 $p_2^{-1}\mu_1-p_1^{-1}\mu_2=0$。因爲 $p_1^{-1}+p_2^{-1}+p_3^{-1}\neq 0$，所以，依定理 9(1)，可知此三直線兩兩相交。事實上，此三直線共點，其交點對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積坐標爲 $(p_1^{-1}:p_2^{-1}:p_3^{-1})$，它就是點 $P(p_1:p_2:p_3)$ 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的等距共軛點。 ‖

在定理 15(2)中，當點 P 的面積坐標 $P(p_1:p_2:p_3)$ 滿足 $p_1p_2p_3\neq 0$ 但 $p_1^{-1}+p_2^{-1}+p_3^{-1}=0$ 時，點 P 對 $\Delta A_1A_2A_3$ 沒有等距共軛點，因爲在此種情形中，直線 A_1C_1、A_2C_2 與 A_3C_3 兩兩平行。至於那些點 $P(p_1:p_2:p_3)$ 會滿足 $p_1p_2p_3\neq 0$ 且 $p_1^{-1}+p_2^{-1}+p_3^{-1}=0$ 呢？這些點在二次方程式 $\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1+\mu_1\mu_2=0$ 的圖形上，此圖形乃是以 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心爲中心、且通過三頂點 A_1、A_2 與 A_3 的橢圓。

(2)例 24：在任意三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 中，重心對 $\Delta A_1A_2A_3$ 的等距共軛點爲其本身；Gergonne 點與 Nagel 點是一對等距共軛點。 ‖

（待續）

徵　稿

本刊的「科學教室」專欄爲增進其在教學上的功能，以補充中學科學課程與教材，特此邀請各級教師撰稿。內容範圍如同本刊「發行旨趣」所載，包括數學、物理、化學、生物、地球科學，以及資訊科學，而能將各學科的基本原理或概念，以簡單而有趣的演示或實驗操作的方式呈現者，都在所歡迎。若能配合教學內容而且具有創意性者將優先刊登。

本刊最鼓勵中等學校現職教師，就其教學經驗撰稿以分享同好，文長不拘，但以打字排版後，包括圖表不超過六頁爲最適當，敬請踴躍賜稿。

編輯部