閒話四邊形的幾種面積切割

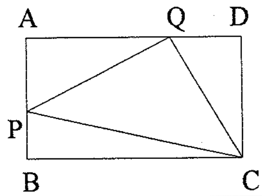
鄭再添
國立臺灣師範大學附屬中學

一、前　言

在八十五學年度台北區的國中組數學競試試題裡，有幾個與長方形面積切割相關的問題，引發筆者極高的興趣與關注，進而在腦海裡產生一些聯想。因此不揣淺陋，謹借科教月刊一隅和大家交換心得，並就教於學界賢達。更希望在中學教師同仁的教學參考方面能有所助益。

二、本　文

(甲)矩形的黃金分割值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，應可算是所有關於四邊形面積切割問題裡知名度很高的一個。在第一階段（初試）的試題第一部分第 4 題就是與此相關的：

> 如右圖矩形 ABCD 中，已知△ APQ 面積＝△ BCP 面積＝△ CDQ 面積，則 $\overline{AQ}$ ： $\overline{QD}$ 的比值爲__________。
>
> 
>

由於是塡充題，在承辦單位發佈的參考答案裡看不到解法，筆者自行作答的方式如下：

設 $\overline{AQ}$ ： $\overline{QD}$ 的比值爲 r(即($\overline{AQ}=r$, $\overline{QD}=1$)，$\overline{AP}$ 長爲 s

則　　△ APQ 面積＝$\frac{1}{2}rs$ ＝△ CDQ 面積

故知　　$\overline{CD} = rs$

因此又知　　$\overline{BP} = sr - s = (r-1)S$ ，$\overline{BC} = r+1$

所以有　　△ BCP 面積＝$\frac{1}{2}rs = \frac{1}{2}(r+1)(r-1)S$

整理得　　$r^2 - r - 1 = 0$

故得　　$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (r > 0)$ #

筆者自愧於孤陋寡聞，之前未曾見過這樣的引介黃金分割值方式，也看不透它是否蘊藏著深一層的幾何意義，希望出題者能不吝賜教，或藉此拋磚引玉，喚來有識之士加以闡明，相信必可嘉惠更多學子。筆者注意到的是：這樣的矩形未必是黃金矩形。從上面的解法中可以看出，在求 r 的過程中可看出 s 之值可爲任一正數，因此任意矩形都可作成滿足這樣題意的切割。

另一方面，值得一提的是它的一般化觀點：矩形的條件可放寬爲任意平行四邊形。設$\angle A=\theta$，則$\angle B=\angle D=\pi-\theta$；因爲$\mathrm{Sin}(\pi-\theta)=\mathrm{Sin}\,\theta$，而有

$$\triangle APQ=\frac{1}{2}rs\sin\theta=\triangle CDQ=\frac{1}{2}rs\sin(\pi-\theta)=\triangle BCP=$$

$$\frac{1}{2}(r+1)(r-1)\,s\sin(\pi-\theta)$$

所以結果$\overline{AQ}:\overline{QD}$的值是不受影響的。

(乙)同份試題的下一題也是和本文談論主旨有關的，茲抄錄如下：

小明將一個長方形紙片剪成四個小長方形紙片（如圖示），並量出其中三個小長方形面積分別爲 a,b,c,那麼另一個小長方形面積爲________。（以 a,b,c 表示之）

a	b
?	c

這題的答案是$\frac{ac}{b}$。換句話說，不相鄰的兩個長方形面積的乘積會相等！同學們或許未聽過，但它並不難；在現行國中數學教科書第三冊第三章裡，使用面積觀點來引介乘法公式的教學可以提供他們很好的思考方向。參見圖一所示，圖內標示爲各塊之面積，相對於上圖，可以看出兩不相鄰長方形面積的乘積都是等於$x_1x_2y_1y_2$。

	x_1	x_2
y_1	x_1y_1	x_2y_1
y_2	x_1y_2	x_2y_2

圖一

這個問題顯然也是可以一般化到任意平行四邊形上的。這樣看待問題對於相關題目的討論會有幫助，請待下文分解自可明白。

根據此題的結論，筆者想到兩種改變出題的方式供教師同仁們參考：

(1)如圖二所示，一長方形被切割成四個小長方形，其中三塊的面積已標示在圖內，則第四塊的面積爲________。

20	15
12	?

圖二

(2)已知長方形的長與寬分別爲 12 與 7 ，如圖三所示被切割成四塊小長方形後，其中不相鄰兩塊的面積爲 32 與 12 ，則另兩塊的面積分別是多少？

32	?
?	12

圖三

第(1)題外表平凡，似乎只是把上述結論當公式套用就好了；但若事先不曾認識有此結論，則題目給定已知數值會予人數與數間的相關聯想（例如因數分解、求取公因數等等），且對結果的是否具一般性，或僅是設定好的某種特殊狀況，處於不確定狀態中，因此不見得比原題容易。如果考前已知有此“公式”，那給出數據還是比文字數“有得算”一些—雖然損失了一點形式與抽象上的考驗。又若將數據改成如 15 、 11 、 7 之類時，利用因數分解認定長與寬的解題策略將受挫折，需有更一般性的想法才能找到正確解題方向，在層次上自然提升起來。有興趣的教師同仁，或許可以針對這些不同層次，設計一系列的問題去探查學生的想法，相信在教學上一定會有幫助的。

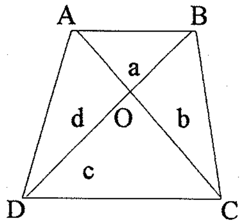
至於第(2)題的解法也不難，可設欲求者爲 x 、 y ，得一聯立方程組

$$\begin{cases} xy = 32 \times 12 = 384 \\ x + y = 12 \times 7 - 32 - 12 = 40 \end{cases}$$

利用代入消去法即解得 $x = 24$ 、 $y = 16$(或 $x = 16$ 、 $y = 24$)。

如果希望再增加題目的難度，就不妨把長方形改爲平行四邊形來敘述。這對兩小題都是可行且有效的。

(丙)對於任意四邊形來說，有沒有類似的性質存在？我們得到以下類似的結果：參見圖四所示，兩對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 相交於 O ，將四邊形 ABCD 分割爲面積是 a 、 b 、 c 、 d 的四個三角形，則必有 $ac = bd$ 的關係式成立！



圖四

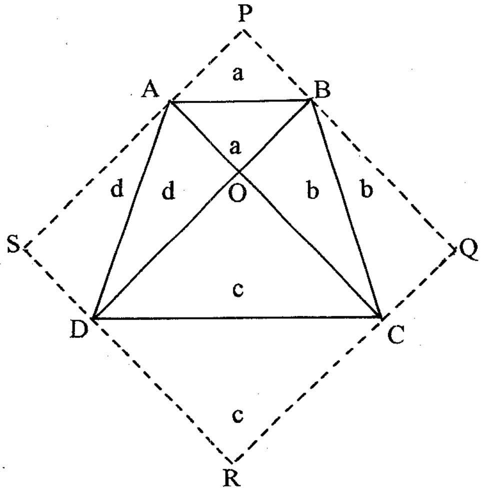
利用面積公式來解題時，可設 $\overline{AO}=x_1, \overline{CO}=x_2, \overline{BO}=y_1, \overline{DO}=y_2,$ ，$\angle$ AOB $=\theta$ ，則

$$a=\frac{1}{2}x_1y_1\sin\theta,\quad b=\frac{1}{2}x_2y_1\sin(\pi-\theta),\quad c=\frac{1}{2}x_2y_2\sin\theta,\quad d=\frac{1}{2}x_1y_2\sin(\pi-\theta)$$

故得　$ac=\frac{1}{4}x_1x_2y_1y_2\sin^2\theta=bd\#$

讓我們換一種方式看待會比較有趣：

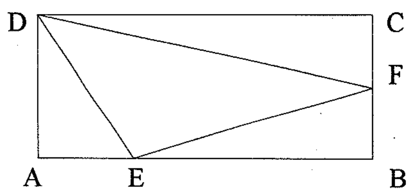
如圖五所示，分別過 A 、 C 作 $\overline{BD}$ 的平行線，再過 B 、 D 作 $\overline{AC}$ 的平行線，即得一平行四邊形 PQRS ，而四邊形 AOBP 、 BOCQ 、 CORD 及 DOAS 也都是平行四邊形；如此則可利用(乙)部分之舊經驗知(2a)(2c)＝(2b)(2d)，從而得 ac ＝ bd 變得更“理所當然”！



圖五

(丁)在同次競試第二階段（複試）的題目裡，又出現一則相關的考題：

若長方形如圖：
E,F 分別在 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 邊上，已知△ ADE 、△ BEF 、△ CDF 的面積分別爲 2,3,4 ，則△ DEF 的面積爲________。



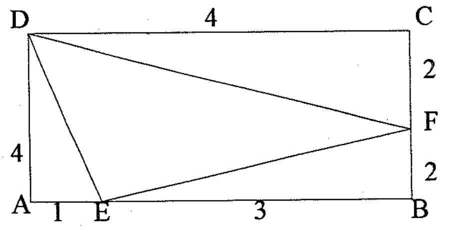
它的參考答案是 7 。因爲數值簡單，相關性又強，很容易予考生投機（湊合答案）之便宜，印證了筆者在(乙)部分所論述的數值與考題層次觀點。如圖六所示是爲學生猜答的方式之一：

由於各邊設定之長滿足題意，則

長方形 ABCD 面積＝ $4 \times 4 = 16$

（已是正方形）

$\therefore \triangle$ DEF 面積＝ $16 - 2 - 3 - 4 = 7$

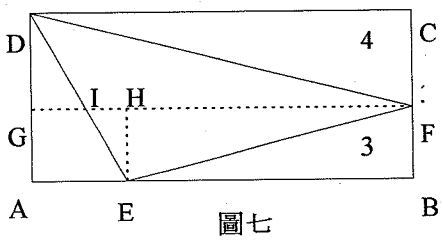


圖六

另一簡單有效的猜答方式則見圖七：若 F 恰為 $\overline{BC}$ 中點，則$\triangle$ EHI ≅ $\triangle$ DGI ，故得

$\triangle$ DEF 面積＝$\triangle$ DGF 面積

＋$\triangle$ EFH 面積＝ $4 + 3 = 7$



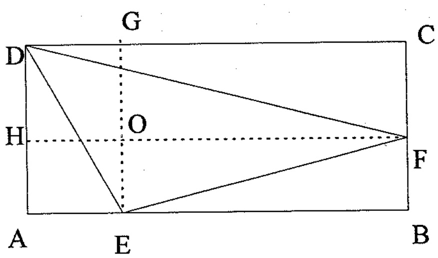
圖七

出題者的原意（評量目標之類）如何？我們無從得知。但若由前後兩階段的相關問題做聯想，或許像以下圖八這類處理方式是被認為比較正規的解法：

過 E 、 F 分別作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的垂線 $\overline{EG}$、$\overline{FH}$ 相交於 O ，則

AEGD 面積＝ 4 ， EBFO 面積＝ 6 ，

FCDH 面積＝ 8 ，上述三式之和為



圖八

ABCD 面積＋ DHOG 面積＝ $4 + 6 + 8 = 18$ ；

若設 DHOG 面積＝ X ，則

AEOH 面積＝ $4 - X$ ，　　FCGO 面積＝ $8 - X$

由(乙)關係式得知　$6X = (4 - X)(8 - X)$

亦即　　$X^2 - 18X + 32 = 0$

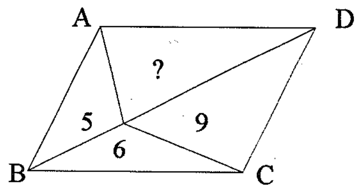
解之得　　$X = 2$（另一解 $X = 16 > 4$ ，不合題意）

故　ABCD 面積＝ $18 - 2 = 16$ ，$\triangle$ DEF 面積＝ $16 - 2 - 3 - 4 = 7$

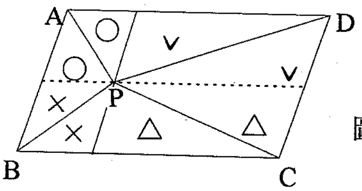
這樣的解法涉及二次方程式，也用到了關係式 $ac = bd$，可能較合乎出題者的期待。只因所給數值設計影響，導致相當多考生抄各種小路而行，恐怕已偏離了預定評量標的。

(戊)關於平行四邊形的面積切割，筆者再提出下列問題供教師同仁們參考：

平行四邊形 ABCD 內一點 P 與四頂點連接，將原四邊形分割成四個三角形；若已知其中三塊面積如圖所示，求第四塊面積。



如果採用解析計算，那得花些時間去列式求解：選擇幾何觀點可就輕鬆多了：如圖九所示，過 P 點分別作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的平行線，則此時平行四邊形 ABCD 被切割成兩兩面積相等的四組三角形；；故知欲求之面積爲 5 + 9 − 6 = 8 。



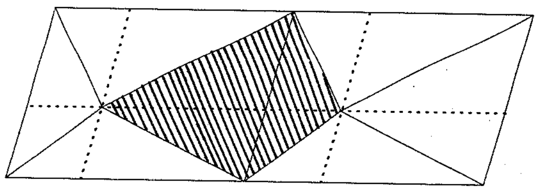
圖九

事實上，對平行四邊形 ABCD 內任意點 P 來說，恆有

$$\triangle PAB \text{ 面積} + \triangle PCD \text{ 面積} = \triangle PBC \text{ 面積} + \triangle PDA \text{ 面積}$$

成立。事實上，即使點 P 在形上或形外時，類似的結果亦仍存在，有興趣的讀者請逕參閱[4]一文說明。

您是否覺得這種切割方式和(丙)部分者有些類似？(丙)中的四邊形是任意的，這裡則是 P 點可以任意取；它們之間的異同，只要在圖九的旁邊再複製一次，即成了圖十的模樣。從圖立刻可以看到兩者並存、相依相共的親蜜關係！幾何的奧妙燦然發散出來，已經無須枉費口舌。



圖十

三、結　語

有關面積切割的方式，可說是千奇百怪、罄竹難書。從古老的“將一正方形分割成有限個互不全等的小正方形”問題（參見[3]），以至“切割矩形成最少正方形個數”問題的相對於輾轉相除法（請參見[5]），而金黃矩形僅其中一特例看來，就已夠令人眼花繚亂了。本文原就因應幾個相關試題有感而發，無法再論及更多不同的切割方式，或切割線如何尺規作圖之類（參見[1]及[2]）問題。不周之處，尚請海涵。

筆者有一種感觸：如果幾何問題能以幾何方式解決，將更有助於人們體認問題的內涵、透視自然的奧秘。這樣的解題經驗，會帶來獲取智慧的喜稅與領悟。諸如(丙)及(戊)部分中作輔助線的思考模式，遠勝於使用代數計算方式解題的成就及心得。不過，當幾何直觀不足以應付時，代數解析正可以適時提供援助，還是有必要兼修並具的。

競試的目的，顯然不在於如何考倒學生；出題的艱辛，也是教師們都感同身受的。舉辦數學競試選拔具科學才能的青少年，絕對是件意義深遠的工作。承辦學校能將試題及參考答案寄發各參加的國中，更是呈現勇於負責的徵信態度。如果能效“中學數學挑戰徵答題”的通訊解題發掘數學資優生研究小組作法，在科教刊物上公開提示出題、解題的重點及評析，將更是廣大中學師生所熱切期盼的！

四、參考資料

[1]王秋富、林凱揚：多邊形形上點面積等分線探討，第三十一屆中小學科展優勝作品專輯（國中組），P127 ～ 137 。

[2]王秋富、鄭再添：凸多邊形等分點作圖探討。科學教育， 142, 23 。

[3]趙文敏：寓數學於遊戲（第二輯）。 77 年二版．九章。 P22 ～ 25 、 90 ～ 91 。

[4]鄭再添：有關平行四邊形面積的一則推廣討論，科學研習， 26 (5), 13 。

[5]鄭再添：長方形切割的探討。科學研習， 33 (4), 6 。

(上接 47 頁)

5.市售的方型電池帽扣，紅色導線所接的鱷魚夾是正極。

6.紫色高麗菜汁在不同 pH 值所顯現的顏色如表 1（方泰山教授實驗室提供）。

7.新鮮的紫色高麗菜，一葉一葉撕下後涼乾（放在冷氣房，或家用電冰箱內），可以長時間貯存於電冰箱內不會變壞。需要時，撕成小片，像沖泡茶葉的方式浸泡約 10 分鐘，就可得紫色高麗菜汁，非常方便。

表 1　紫色高麗菜汁的顏色與其所對應的 pH 值

溶液 pH 值	溶液的顏色	溶液 pH 值	溶液的顏色
1 － 2	紅	8	青　綠
3	粉　紅	9 － 10	翠　綠
4	粉　紫	10 － 11	草　綠
5	淡藍紫	11 － 13	黃　綠
6	藍　紫	13 以上	深　黃
7	紫　青		