中學數學挑戰徵答題參考解答評析

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 2001

正 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 之邊長為 a，S 為外接圓上任意點。

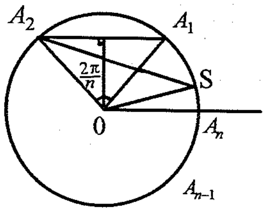
試證：$\sum_{k=1}^{n}\overline{SA_k}^2$ 為一定值，並求之。

解答：

證明：（1）不失一般性：取 A_n 在 x 軸的正向上，O 為原點，也是圓心。

S 在 A_1A_n 圓弧上，如圖（R 為外接圓半徑）。

設 A_1，A_2，…，A_n 分別以複數 Z_k 表示，且 S 以 Z 表示則



$$\overline{SA_k}^2=|Z_K-Z|^2=(Z_K-Z)(\overline{Z_K}-\overline{Z})$$
$$=Z_K\overline{Z_K}+Z\cdot\overline{Z}-(Z\cdot\overline{Z_K}+\overline{Z}\cdot Z_K)$$
$$=2R^2-(Z\cdot\overline{Z_K}+\overline{Z}\cdot Z_K)$$
$$\sum_{k=1}^{n}\overline{SA_k}^2=\sum_{K=1}^{n}2R^2-(Z\cdot\overline{Z_K}+\overline{Z}\cdot Z_K)$$
$$=2nR^2-(Z\sum_{K=1}^{n}\overline{Z_K}+\overline{Z}\sum_{K=1}^{n}Z_K)$$
$$=2nR^2\text{為一定值}$$

（因為 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 為正 N 邊形，所以 $\sum_{K=1}^{n}Z_K=\sum_{K=1}^{n}\overline{Z_K}=0$）

（2）$\overline{A_1A_2}=a=2R\sin\frac{\pi}{n}$，所以$R=\frac{a}{2}\csc\frac{\pi}{n}$，

因此，$\sum_{k=1}^{n}\overline{SA_k}^2=\frac{n}{2}a^2\csc^2\frac{\pi}{n}$。

《解題重點》

1.任意正多邊形必內接於一圓。

2.建立複數坐標系，並將正 n 邊形的 n 個頂點在圓上以原點為圓心，以複數表示。

3.任一複數 Z，$|Z|^2=Z\cdot\overline{Z}$。

4.設 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的 n 個頂點的坐標分別為 Z_1，Z_2，…，Z_n（取 Z_n 在 x 軸正向上）

則 Z_1，Z_2，…，Z_n 為 $Z^n=R^n$ 之 n 個根，故 $Z_1+Z_2+\cdots+Z_n=0$。

《評析》

1. 本題配合高一基礎數學第二冊複數與平面向量之題材設計，為圓內接正 n 邊形

之一很重要性質，屬於簡易題型，參與徵答人數有雄中林耕賢等 51 人（含鳳山國中一年級學生朱浩瑋），得分率 0.88 尚稱理想；高中三個年級中，高二徵答人數 35 位，高一及高三分別有 4 位及 11 位，各年級平均得分率都很接近，沒有明顯的差距。

2. 本題有複數法，向量法及純三角函數法等多種解法，大部分同學都用複數方法求解，把正 n 邊形的 n 個頂點 Z_i 看成 $Z^n=1$ 之 n 個複數根，再利用 $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{Z_i}$ 的性質去處理，亦有部分的同學用"向量"去處理，效果相同。
3. 參與徵答同學多能完整解題，尤以用複數法解題品質最佳，另外武陵高中三年級劉鴻傑用純三角函數法，解題品質亦佳。
4. 本題解題品質較佳的高二同學計有建中楊政達；北一女黃怡碧；武陵高中游志強、黃世昌、鍾隆興；台中一中林宗茂；雄中林耕賢等 7 人

問題編號 2002

設 p_1，p_2，p_3，⋯，p_n是由質數組成的 n 項數列，已知 $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n$ 且這個 n 質數的乘積等於其總和的 5 倍，試確定 n 的值及此數列的各項。

解答：由已知條件顯示至少有一個 $p_j=5$。令 p 爲其餘的質數的最大值，

σ 爲 5 ，p 兩數以外$(n\text{-}2)$個質數的和

π 爲 5 ，p 兩數以外$(n\text{-}2)$個質數的乘積

由條件知：

$5(5+p+\sigma)=5p\pi \qquad \therefore 5+p+\sigma = p\pi \cdots (1)$

注意：當 $x,y \ge 2$，$xy-x-y=(x-1)(y-1)-1 \ge 0$，即 $xy \ge x+y$

在(1)式中若 n=2 時，視σ=0 ，π=1 不符合(1)，

故知 $n \ge 3$，$\pi \ge \sigma (n=3\text{時}，\pi=\sigma)$

由(1)得 $5+p+\sigma \ge p\sigma (n \ge 3) \qquad \therefore (p-1)(\sigma-1) \le 6 \cdots\cdots (2)$

$\because \sigma \ge 2$，$\therefore p-1 \le 6$，$\therefore p \le 6+1=7 \qquad \therefore p$可能值爲2，3，5，7

當 p=7 時，$\sigma-1 \le 1$，$\sigma \le 2$，$\therefore \sigma=2$

僅有另一項 2 ，但 2,5,7 符合（此時 n=3 ）

當 p=5 時，$\sigma-1 \le \frac{3}{2}$，$\therefore \sigma=2$　　亦僅有另一項 2 ，但 2,5,5 亦不符

當 p=3 時，$\sigma-1 \le 3$，$\therefore \sigma \le 4$，

可能有一個 2 ，或一個 3 ，或二個 2 ，但可能有 2,3,5 ； 3,3,5 ； 2,2,3,5 ；符合者僅有 2,2,3,5

當 p=2 時，$\sigma-1 \le 6$，$\sigma \le 7$

可能有一個 2 ，或二個 2 ，或三個 2 ，但 2,2,5 ； 2,2,2,5 ； 2,2,2,2,5 均不符合

由上面的分析討論得到：恰有兩個數列<2,5,7>, <2,2,3,5>滿足已知條件。

《解題重點》

1.由題意知必有一項是 5 與 10=2 × 5 的關係，可推斷數列 $< P_k >$ 中，有兩項分別是 2 和 5 。

2.有限數列必有一項的值是最大的。

3.大於 1 的兩整數之和不大於積。

4.數的先後排列。

《評析》

1.本題配合高二統合數學數論題材設計，難度稍高，然參與徵答人數計有建中楊政達等 51 人（含鳳山國中一年級學生朱浩瑋）得分率 0.71 ，跟學生的學習經驗來研判，亦屬吻合；高中三個年級彼此之間的得分差距亦不明顯。

2.本題從個數 n 著手亦為良好的策略，即針對 n=1,2,3,……分別討論發現 $n>5$ 是不可能的；還有部分參與作答只猜對正確答案但無法合理解釋或解說表達不清。

3.本題需要分類討論，大部分的同學掌握不住"要點"討論，稍嫌"雜亂"，本題答題品質較佳者計有建中楊政達、李國禎；雄中盧佑群等 3 人。

4.高一學生的 7 位徵答者中，以雄中廖英傑之答題品質最佳。

問題編號 2003

有 100 棵樹，分別種在公園裡一塊"10 行× 10 列"正方形 100 個交叉點的土地上，試確定最多能砍除多少棵樹，使得從每一棵砍後的位置，都看不出其他哪些樹被砍除。

解答：（ 1 ）將 10 × 10 的土地上的 100 個交叉點分別建立在坐標平面的格子點上，其坐標為

(0,0)，(0,1)，……，(0,9)

(1,0)，(1,1)，……，(1,9)

………………

(9,0)，(9,1)，……，(9,9)

（ 2 ）對相鄰的四個格子點

$(2i,2j)$，$(2i+1,2j)$，$(2i,2j+1)$，$(2i+1,2j+1)$，$0\le i$，$j\le 4$ 而言，這四個點為頂點，可形成一個正方形。在已知 100 個格子點上，共可形成 25 個這樣的正方形 $(i=0,1,2,3,4$；$j=0,1,2,3,4)$。現在我們將每個位於 $(2i,2j)$ 位置上的樹砍除，那麼共可砍除 25 顆樹，而除了這 25 顆樹之外，如果在任意另外的位置上的樹砍除的話，則以它為中心，邊長為 2 的正方形邊上一定有一顆已被砍除的樹的位置可以看到它。因此，被砍除的樹不能超過 $(2i,2j)$，i，$j=0,1,2,3,4$ 等 25 個位置上的 25 顆樹。

（ 3 ）現在證明在 $(2i,2j)$，i，$j=0,1,2,3,4$ 的位置上的任意兩顆樹彼此看不到。設 $P(2i,2j)$與$Q(2i',2j')$ 是被砍除的兩顆樹的位置，則 P,Q 兩點的中點 $R(i+i',j+j')$，如果 $i+i'$與$j+j'$ 中有一數爲奇數時，那麼 R 的位置上的樹擋在 P 與 Q 之間，所以 P,Q 互相看不到。

如果 $i+i'$與$j+j'$ 都是偶數，那麼取 P 與 Q 的中點，依上面的說明，可知，必有一顆位於 P 與 Q 之間的樹擋在 P 與 Q 之間，使 P,Q 互相看不到。

（ 4 ）由（ 2 ），（ 3 ）的分析與討論，可知最多可砍除 25 顆樹滿足命題的條件。

（註：砍樹的方法不止一種）。

《解題重點》

1.建立坐標系標定樹的位置。

2.以 2 爲邊長的正方形的中心位置，可以看到邊上的八顆樹。

3.中點坐標與奇偶分析。

《評析》

1. 本題屬於組合數學的範圍，最生活化的問題，爲此次參與徵答者的人數屬最多的一題，計有鳳山高中黃獻霆等 67 人(含鳳山國中一年級學生朱浩瑋)，惟得分率 0.53 在此次徵答五題中最低，直觀能力很強但表達說明不夠清楚。
2. 本題涉及基本數學知識，鳳山國中一年級的朱浩瑋本題得滿分，有些徵答者配合作圖實例解說應屬好的計策，但宜配合文字說明。
3. 本題解題品質較佳的高二同學計有北一女黃怡碧，鳳山高中黃獻霆等 2 人。
4. 高一學生的 18 位徵答者中，以雄中的林家平解題品質最佳。

問題編號 2004

6 個小圓在一個大圓內，每個小圓與大圓都相切，且大圓內的任意相鄰兩個小圓都相外切。若 6 個小圓與大圓的切點依序爲 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6。

證明：$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_3A_4}\times\overline{A_5A_6}=\overline{A_2A_3}\times\overline{A_4A_5}\times\overline{A_6A_1}$ 。

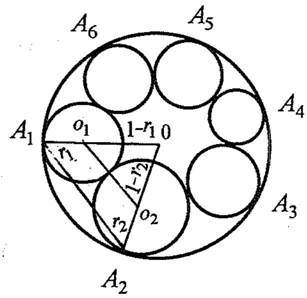
解答：證明：設大圓的半徑爲 1 ，且 6 個小圓的切圓分別爲 A_1，A_2，…，A_6，如圖所示，又令 6 個圓的半徑依序爲 r_1，r_2，r_3， r_4，r_5，r_6

①就 ΔA_1OA_2 而言，令 $\angle A_1OA_2=\theta$ ，則易得 $\overline{A_1A_2}=2\sin\frac{\theta}{2}$，而 ΔO_1OO_2 中，由餘弦定律得知

$(r_1+r_2)^2=(1-r_1)^2+(1-r_2)^2-2(1-r_1)(1-r_2)\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1-r_1-r_2-r_1r_2}{(1-r_1)(1-r_2)}$，所以

$\overline{A_1A_2}^2=4\sin^2\dfrac{\theta}{2}=2(1-\cos\theta)=\dfrac{4r_1r_2}{(1-r_1)(1-r_2)}$。



②同①的方式分別可得 $\overline{A_3A_4}^2=\dfrac{4r_3r_4}{(1-r_3)(1-r_4)}$，

$\overline{A_5A_6}^2=\dfrac{4r_5r_6}{(1-r_5)(1-r_6)}$，$\overline{A_2A_3}^2=\dfrac{4r_2r_3}{(1-r_2)(1-r_3)}$

$\overline{A_4A_5}^2=\dfrac{4r_4r_5}{(1-r_4)(1-r_5)}$，$\overline{A_6A_1}^2=\dfrac{4r_6r_1}{(1-r_6)(1-r_1)}$。

③由①②的結果，可得

$\overline{A_1A_2}^2\times\overline{A_3A_4}^2\times\overline{A_5A_6}^2=\overline{A_2A_3}^2\times\overline{A_4A_5}^2\times\overline{A_6A_1}^2$，即得證

$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_3A_4}\times\overline{A_5A_6}=\overline{A_2A_3}\times\overline{A_4A_5}\times\overline{A_6A_1}$。

《解題重點》

1.兩圓相切的基本性質。

2.圓的基本性質(通過弦中點的半徑垂直平分此弦，且爲對應圓心角的角平分線)。

3.餘弦定律。

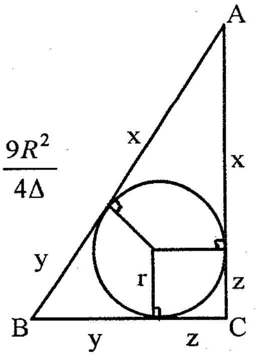
《評析》

1. 本題配合高一基礎數學第二冊三角題材及基本平面幾何上圓的性質設計，難度不高，但僅有嘉中蘇冠武等 42 人參與徵答，此次五道題中，參與人數僅多於第 2005 題，惟得分率 0.95 在這五道題中最高，應與徵答人數較少有關。
2. 本題多用餘弦定理解題，但亦有用七圓定理解題，如北一女黃怡碧及南一中李卓諭，殺雞用牛刀解題，如此宜先証七圓定理始能得高分，否則可能遭扣分。
3. 本題解題品質較佳的高二同學，計有建中蔡旭程、劉家聖、楊政達；武陵高中游志強、鐘隆興；嘉中蘇冠武；鳳山高中黃舜仁及雄中林耕賢等 8 人。

問題編號 2005	任意三角形 ABC，設 Δ與R分別表示其面積與外接圓半徑，證明：$\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\le\dfrac{9R^2}{4\Delta}$。

解答：解法（一）：

證明：①設 I 爲 ΔABC 的內心，且內切圓分別切三角形的三邊形於 D，E，F，令 $\overline{AD}=\overline{AF}=x$，$\overline{BD}=\overline{BE}=y$，$\overline{CE}=\overline{CF}=z$ 且內切圓半徑爲 r，則 $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{x}$，$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{y}$，$\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{z}$，因此



$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{x}+\frac{r}{y}+\frac{r}{z}=\frac{r}{xyz}(yz+zx+xy)$$ 。

②欲證 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\le\frac{9R^2}{4\Delta}$，即證 $\frac{r}{xyz}(yz+zx+xy)\le\frac{9R^2}{4\Delta}$

$\Leftrightarrow 4\Delta r(yz+zx+xy)\le 9R^2xyz\cdots\cdots(*)$

又 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$s=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$

即 $\Delta^2=sxyz$，$(*)$式得 $4\Delta r(yz+zx+xy)\le 9R^2\cdot\frac{\Delta^2}{s}$，又 $\Delta=r\cdot s$，

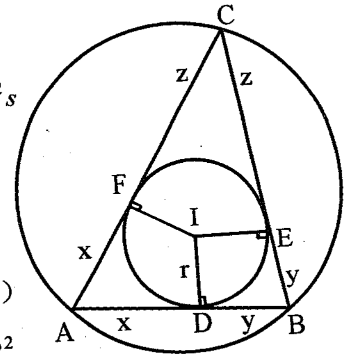
因此只需證 $yz+zx+xy\le\frac{9}{4}R^2\cdots\cdots\cdots$（$**$）。

③ $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin c=\frac{1}{2}abc\times\frac{1}{2R}=rs$

所以 $4Rrs=abc=(s-x)(s-y)(s-z)$

$$=s^3-(x+y+z)s+(xy+yz+zx)s-xyz$$

$$=(xy+yz+zx)s-\frac{\Delta^2}{s}=(xy+yz+zx)s-r^2s$$



即 $4Rr+r^2=xy+yz+zx$，

即 $xy+yz+zx=r(4R+r)\le\frac{R}{2}(4R+\frac{R}{2})=\frac{9R^2}{4}$

（因爲任意三角形 $r\le\frac{R}{2}$（尤拉不等式）恆成立）

所以($**$）式成立，亦即 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\le\frac{9R^2}{4\Delta}$ 。

解法（二）：（採自台師大附中林建位之解法。）

如圖，設 r 爲 ΔABC 之內切圓半徑，而三邊長則爲 $x+y$，$y+z$，$z+x$

$\because R\ge 2r$，等式僅當 $x+y=y+z=z+x$ 時成立

$\therefore$ 原式即等價於 $\frac{r}{x}+\frac{r}{y}+\frac{r}{z}\le\frac{9\cdot(2r)^2}{4\cdot(x+y+z)\cdot r}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{9}{x+y+z}$，要證明此不等式只須連用兩次算幾平均不等式

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3}\le\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}=\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\le\frac{3}{x+y+z}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{9}{x+y+z}$$

以上等號皆於 $x=y=z$，即 $x+y=y+z=z+x$ 時成立。

故得證 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\le\frac{9R^2}{4\Delta}$，等式於 ΔABC 爲正三角形時成立。

《解題重點》

三角形與三角函數基本性質：

1.面積公式 $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin c=\frac{1}{2}abc\times\frac{1}{2R}=rs$ 。

2. $s-a=x$，$s-b=y$，$s-c=z$ 時，由海龍公式得：

$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$s=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$ 。

3. $abc=4Rrs$（由 1.，2.式）。

4.尤拉不等式：任意三角形 $r\le\frac{R}{2}$ 。

5. $\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{x}$，$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{y}$，$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{z}$ 。

《評析》

1.本題配合高一基礎數學第二冊題材設計，難度不高，但參與徵答者僅有台中一中林宗茂等 31 人，得分率 0.85 ，可能與徵答人數較少有關。

2.在此次五道題中本題徵答人數最少，一方面可能由於高一的三角函數基礎訓練不足，另一方面又涉及代數不等式的技術，高一數學有關題材較少涉及，三角幾何不等式的證明能力一般較弱，有待加強。

3.本題解題品質較佳的高二同學計有建中李國禎、蔡旭程；北一女黃怡碧；武陵高中游志強；台中一中林宗茂；雄中林耕賢等 8 人。

4.高一同學僅有 4 位參與本題徵答，武陵高中劉任浩及雄中黎冠成二位都得滿分，其數學能力均已達高二水準，值得喝采。高三同學則有 9 位徵答，幾乎都得滿分，其數學能力自然超越高一高二許多，師大附中林建位的解法分析特佳。

評註：

1.本次徵答統計簡表如表 1

2.本期五題的預期難度適中，但徵答結果顯示比原預期難度稍高，一方面可能與本期科教月刊因紀念創刊擴大篇幅而延期出刊有關，不過在網路上的資訊是正常的，請多多利用。

3.本期是八十六學年度的第一次徵答題，配合高二教學進度設計徵答題，請高中數學教師多多鼓勵學生參與徵答，增進教學資源，提昇數學能力。

4.本期答題成績優異的學生計有建中李國禎、蔡旭程、鄧敦民；台師大附中王世豪、林建位；武陵高中游志強、黃世昌；嘉中蘇冠武；雄中林耕賢、盧佑群、林家平等 11 人。

表 1　徵答統計簡表

總人數　79 人	問題編號	2001	2002	2003	2004	2005
	得分	308	246	243	280	191
	徵答人數	50	50	66	42	32
	得分率	0.88	0.70	0.53	0.95	0.85
一年級　22 人	得分	25	32	60	31	14
	徵答人數	4	7	18	5	4
	得分率	0.89	0.65	0.48	0.89	0.50
二年級　43 人	得分	212	158	140	179	118
	徵答人數	35	32	37	27	19
	得分率	0.87	0.71	0.54	0.95	0.89
三年級　14 人	得分	71	56	43	70	59
	徵答人數	11	11	11	10	9
	得分率	0.92	0.73	0.56	1.00	0.94
參與徵答總校數：14 所 計：　計畫內：10 所，非計畫內：4 所						

5.學生心得感言摘錄如下：

①解了這次通訊解題（編號 2001~2005），2004 、 2005 二題暫未解出。我覺得 2003 最易，一下手即解決了。2002 亦不難。 2001 理論上見似不難，但在此方面也下了一些功夫。它在證明有固定值時較易，可以一般化，成爲「給定任八點，使其和該點距離平方和有固定值」。但在另一方面的求値便較難，使人苦苦冥思，百思後才得其解。因棣美弗定理和 1 的 n 次方根不很熟悉之故，故以後要多練習方能進步。（鳳山國中，朱浩瑋。）

②在學校的考試制度下，過去的求學過程中，我覺得自己讀書好像都只是記憶一些解題方式，而沒有培養獨立思考的力，使得過去自己的思考能力並沒有什麼進步，但現在我已能學著領會數學的本質，且真正體會到思考數學其中的樂趣了。（精誠中學，何彥廷。）

③第一次參加此活動，發覺題目很有水準，有水準的題目才能激發去挑戰它的決心、鬥志，在思考過程實有許多樂趣，是有別於一般的時候，不過我還須多加強技巧才行。還有如何訂閱或拿到科教月刊呢？（協同中學，陳揮文。）

（評注：本期將贈送一本給你，你就可知道如何訂閱或索取月刊了。）

④◆2002 我作得不是很理想，雖然已經盡量捨去繁枝末節，但還是寫得很煩。

（評注：用放縮法導出 n 的不等式，再就 n 的範圍討論。）

◆2005 因爲我的三角很爛，所以乾脆完全化成代數不等式。

（評注：看起來你的三角還好，基本公式還能靈活利用，不要洩氣。）

（建中，陳奕瑋）

⑤數學的思路是無盡的。（成功高中，許桂華。）