第 38 屆(1997 年)
國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(一)

陳昭地(*)、朱亮儒(*)、
葉永南(**)、林哲雄(***)、傅恆霖(****)
(*)國立臺灣師範大學　數學系
(**)中央研究院　數學研究所
(***)國立清華大學　數學系
(****)國立交通大學　應用數學系

國際數學奧林匹亞競賽(IMO)試題源自主辦國以外各參賽國在接受邀請繳交試題期限內提交 0~6 道題(陳昭地，民 81 、民 82)，再由主辦國試題委員會研究選出 24~30 題預選題，分屬代數、幾何、組合數學、數論等不同領域，經由各國領隊組成之主試委員會修訂票選出 6 道題，依主題內容及難易層次中安排每天 3 道題的二份試題。今年的試題，是先由主辦國阿根廷之試題委員會從各國所提供的一百多道試題中研究選出 26~30 題，含代數、幾何、數論和組合數學等不同難度的試題及參考解答。再由主試委員會，經過三天六次會議研究票選出一道代數題、一道幾何題、一道數論題和三道組合數學題。本文的目的在於針對今年七月我國代表團所翻譯成的中文版 IMO 六道試題提供參考解答、評析解題重點，且就我國 6 位學生代表答題概況及本屆 82 個參與國 460 位學生代表得分統計加以比較評析，以供國內相關學者專家、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

一、第 38 屆國際數學奧林匹亞競賽試題

第一天

1997 年 7 月 24 日

每題七分;作答時間共 4.5 小時　　　　*Version :China-Taipei(ROC)*

1.在坐標平面上，具有整數坐標的點構成單位邊長的正方格的頂點。這些正方格被塗上黑白相間的兩種顏色（正如西洋棋盤一樣）。對於任意一對正整數 m 和 n ，考慮一個直角三角形其頂點具有整數坐標，兩股長分別爲 m 和 n ，且其兩股都在這些正方格的邊上。設 S_1 爲這個三角形區域中所有黑色部分的總面積， S_2 則爲所有白色部分的總面績。令

$$f(m,n) = | S_1 - S_2 |。$$

(a)當 m 和 n 同爲正偶數，或同爲正奇數時，計算 $f(m,n)$的值。

(b)證明： $f(m,n)\le\frac{1}{2}\max\{m,n\}$，對所有 m,n 都成立。

(c)證明：對於每一個常數 C ，存在 m,n ，使得 $f(m,n)<C$ 不會成立。

2.三角形 ABC 中，$\angle A$ 是最小的內角。兩點 B 和 C 將此三角形的外接圓分成兩個弧。設 U 爲落在不含 A 點的弧上且異於 B 與 C 的一點。線段 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的垂直平分線，分別交線段 $\overline{AU}$ 於 V 與 W 。直線 BV 與直線 CW 相交於 T 。證明： $AU = TB + TC$ 。

3.設 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 爲滿足下列條件的實數：

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$$

且

$$|x_i| \le \frac{n+1}{2}\text{；} i = 1,2,\ldots,n \text{。}$$

證明：存在 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的一個排列 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 使得

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_2| \le \frac{n+1}{2} \text{。}$$

第二天

1997 年 7 月 25 日

每題七分;作答時間共 4.5 小時　　*Version :China-Taipei(ROC)*

4.一個 $n \times n$ 的矩陣（正方形陣列）稱爲一個 n 階『銀矩陣』，如果它的元素取自集合 $S =\{1,2,\ldots,2n-1\}$ 且對於每一個 $i = 1,2,\ldots,n$ ，它的第 i 列與第 i 行中的所有元素合起來恰好是 S 中的所有元素。

證明：(a)不存在 $n = 1997$ 階的銀矩陣。

(b)有無限多個 n 的值，存在 n 階銀矩陣。

5.試求出滿足下列等式的所有正整數對 (a,b)　$(a\ge 1, b\ge 1)$：

$$a^{(b^2)} = b^a \text{。}$$

6.對於每個正整數 n ，將 n 表示成 2 的非負整數次方之和。令 $f(n)$爲正整數 n 的上述不同表示法的個數。如果兩個表示法的差別僅在於它們中各個數相加的次序不同，這兩個表示法就被視爲是相同的。例如， $f(4) = 4$ ，因爲 4 恰有下列四種表示法： 4 ； 2 + 2 ； 2 + 1 + 1 ； 1 + 1 + 1 + 1 。

證明：對於任意整數 $n\ge 3$ ，

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}} \text{。}$$

二、第 38 屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

根據主辦單位確認公布之第 38 屆 82 個參賽國共計 460 位競賽代表成績，參考前幾屆分析方式(陳昭地，民 81 、民 82)，列表如下，以供試題解答分析之參考。

表 1　第 38 屆 IMO 全部參與競試學生之成績統計表
總人數 460 人

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	2.48	3.90	1.78	3.74	3.35	0.81	16.07
得分率	0.35	0.56	0.25	0.53	0.48	0.12	2.30
標準差	2.24	3.31	2.75	2.72	2.97	1.71	22.21
變異係數	90%	85%	155%	73%	89%	211%	70%
難度指數	0.40	0.51	0.37	0.53	0.49	0.19	
鑑別指數	0.56	0.88	0.69	0.74	0.81	0.37	

表 2　金牌、銀牌、銅牌及未得獎分組成績統計表
表 2(a)　金牌獎（人數 39 人，成績≧ 35 ）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	5.95	7.00	6.85	6.79	6.90	4.41	37.90
得分率	0.85	1.00	0.98	0.97	0.99	0.63	5.41
標準差	1.39	0.00	0.71	0.70	0.38	1.89	2.27
變異係數	23%	0%	10%	10%	6%	43%	6%

表 2(b)　銀牌獎（人數 70 人，35 ＞成績≧ 25 ）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	4.21	6.51	4.43	6.09	5.89	1.90	29.03
得分率	0.60	0.93	0.63	0.87	0.84	0.27	4.15
標準差	2.13	1.59	3.07	1.63	2.00	2.21	2.73
變異係數	50%	24%	69%	27%	34%	116%	9%

表 2(c)　銅牌獎（人數 122 人，25 ＞成績≧ 15 ）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	2.82	5.33	1.34	4.81	4.63	0.31	19.22
得分率	0.40	0.76	0.19	0.69	0.66	0.04	2.75
標準差	1.81	2.80	2.19	2.05	2.69	0.69	2.86
變異係數	64%	53%	164%	43%	58%	223%	15%

表 2(d)　未得獎者（人數 229 人，成績＜ 15 ）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	1.18	1.81	0.34	1.94	1.30	0.14	6.70
得分率	0.17	0.26	0.05	0.28	0.19	0.02	0.96
標準差	1.38	2.81	1.01	2.15	1.87	0.67	4.37
變異係數	117%	156%	296%	111%	144%	478%	65%

表 3　1997 年第 38 屆國際數學奧林匹亞競試中華民國學生代表得分及成績統計表

姓名	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	總分	獎牌
廖健溢	4	7	1	7	7	7	33	銀
黃柏凱	4	7	0	7	7	2	27	銀
張懷良	4	7	1	7	7	1	27	銀
吳孟樵	1	0	3	7	7	0	18	銅
陳思妤	7	7	1	7	4	1	27	銀
陳明揚	3	7	2	1	3	0	16	銅
總分	23	35	8	36	35	11	148	4 銀 2 銅

表 4　1997 年第 38 屆國際數學奧林匹亞競試各題得分成績人數統計表

分數＼題次	1	2	3	4	5	6
0	91	164	269	81	136	341
1	143	24	64	72	51	40
2	29	16	5	20	36	12
3	23	4	22	34	31	22
4	103	7	4	58	21	4
5	15	9	2	29	19	27
6	8	0	6	31	14	4
7	48	236	88	135	152	10
總人數	460	460	460	460	460	460

表 5　1997 年第 38 屆 IMO 前十名國家成績統計表

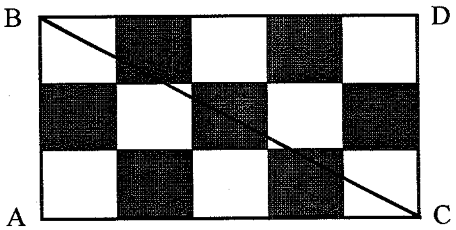
名次	國家 ＼ 題次	1		2		3		4		5		6		總計	
		總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均
1	中國大陸	39	6.50	42	7.00	38	6.33	38	6.33	41	6.83	25	4.17	223	37.17
2	匈牙利	33	5.50	42	7.00	35	5.83	42	7.00	42	7.00	25	4.17	219	36.50
3	伊朗	33	5.50	42	7.00	42	7.00	42	7.00	42	7.00	16	2.67	217	36.17
4	俄羅斯	38	6.33	42	7.00	29	4.83	30	5.00	42	7.00	21	3.50	202	33.67
4	美國	37	6.17	37	6.17	32	5.33	42	7.00	38	6.33	16	2.67	202	33.67
6	烏克蘭	21	3.50	42	7.00	35	5.83	41	6.83	34	5.67	22	3.67	195	32.50
7	保加利亞	29	4.83	42	7.00	28	4.67	40	6.67	42	7.00	10	1.67	191	31.83
7	羅馬尼亞	25	4.17	42	7.00	25	4.17	33	5.50	40	6.67	26	4.33	191	31.83
9	澳大利亞	24	4.00	35	5.83	37	6.17	42	7.00	42	7.00	7	1.17	187	31.17
10	越南	24	4.00	42	7.00	29	4.83	25	4.17	42	7.00	21	3.50	183	30.50
平均(60 人)		5.05		6.8		5.5		6.25		6.75		3.15		33.5	
總平均(460 人)		2.48		3.90		1.78		3.74		3.35		0.81		16.07	

三、第 38 屆國際數學奧林匹亞競賽試題詳解及評析

問題 1：(白俄羅斯)

[解答]：(試題委員會公布的解法)

對一多邊形 P，我們令 S_b (P)表示 P 內黑色區域的面積，而 S_w (P)表示 P 內白色區域的面積。



(a)設□ ACDB 為一矩形(如圖所示)， AB=m ， AC=n ，當 m 與 n 有相同的奇偶性時，

$$S_b(\Delta ABC)=S_b(\Delta BCD)\text{且}S_w(\Delta ABC)=S_w(\Delta BCD)。$$

故

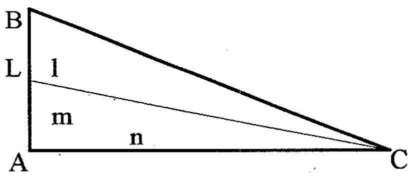
$$f(m,n)=\ |S_b(\Delta ABC)-S_w(\Delta ABC)|$$

$$=\frac{1}{2}|S_b(\square ACDB)-S_w(\square ACDB)|=\begin{cases}0, \text{當}m,n\text{都是偶數時}\\ \frac{1}{2}, \text{當}m,n\text{都是奇數時}\end{cases}。$$

(b)當 m,n 有相同的奇偶性時，由(a)的結果，本命題顯然成立。故不失一般性，我們可設 m 爲奇數且 n 爲偶數。令 L 爲 AB 上一點，使得 AL= m-1 ，如下圖所示。因爲 m-1 與 n 都是偶數，由(a)知 f(m-1,n)=0 ，即

$S_b(\Delta ALC)=S_w(\Delta ALC)$。故 $f(m,n)=|S_b(\Delta ABC)-S_w(\Delta ABC)|$

$=|S_b(\Delta LBC)-S_w(\Delta LBC)|\le \Delta LBC$ 的面積$=\frac{n}{2}\le\frac{1}{2}\max\{m,n\}$ 。



(c)對此小題，我們只需證明數列 f(2k+1,2k)是無界的。同(b)中，我們令 L 爲 AB 上一點，使得 AL = 2k 。因爲 f(2k,2k) = 0 且 $S_b(\Delta ALC)=S_w(\Delta ALC)$，我們有

$$f(2k+1,2k)=|S_b(\Delta LBC)-S_w(\Delta LBC)|,$$

且 ΔLBC 的面積爲 k 。不失一般性，我們可令 LC 上的方格都是黑色的(如圖所示)，則 ΔLBC 中的白色部分是由 $\Delta M_1L_1N_1$ ，$\Delta M_2L_2N_2N,\ldots,\Delta M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}$ ，ΔBLN_{2k} 所組成，它們的面積和是

$$S_w(\Delta LBC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{2k+1}\{(\frac{1}{2k})^2+(\frac{2}{2k})^2+\ldots+(\frac{2k}{2k})^2\}$$

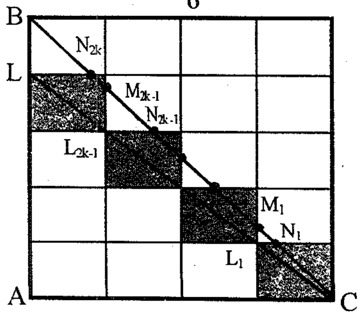
$$=\frac{1}{4k(2k+1)}(1^2+2^2+\ldots+(2k)^2)=\frac{4k+1}{12}。$$

故

$$S_b(\Delta LBC)=k-\frac{4k+1}{12}=\frac{8k-1}{12},$$

得知

$f(2k+1,2k)=|S_b(\triangle LBC)-S_w(\triangle LBC)|=\frac{2k-1}{6}$ 爲一無界的數列。



評析：

1.本題為白俄羅斯設計提供，為一組合(數列)的題目，主試委員會評估為簡易題。考試結果在 460 位參賽者中，有 48 位(10%)得滿分，其中有 24 位最後得到金牌，也有 91 位(20%)得 0 分，全體得分的平均值為 2.48 分，得分率 0.35 ，難度指數 0.4 ，屬本次六道試題中難度中等者，而其鑑別指數為 0.56 ，也相當合理。所有獲得金牌的 39 位選手在本題的平均得分數為 5.95 分，而拿到銀牌的 70 位選手得分之平均值為 4.21 分。我國 6 位選手得分之平均值為 3.83 分。顯然，平常訓練仍需特別加強這類型的題目，才能保住銀牌獎；目標在金牌獎的同學更需把握住這類型的題目，才能獲取更好的成績。

2.解題評分重點：

(1)在(a)的部分能正確求出 f(m,n)之值，可得 1 分。

(2)作圖將(b)中的面積差作適當的變換以導出正確的不等式，可得 3 分。

(3)造出一組數列 (a_k,b_k) 使得函數值數列 $f(a_k,b_k)$ 是無界的，即可得到 3 分。

3.討論：

(1)我國六位代表本題得分依序為 4,4,4,7,1,3 分，共 23 分，其中僅陳思妤同學獲得滿分(7 分)。日本與韓國的學生在本題的表現特別傑出，他們的總分各為 31 分及 33 分。未來在正式的競試中，就必須加強並把握這類型的題目，才有機會在名次上超越日、韓等國。

(2)事實上，從(a)小題的結果，我們可以觀察出 f(m,n) 之值要很大(希望達到無上界)就必須 m 與 n 有不同的奇偶性。由此我們也可進一步得證，當 m 與 n 的奇偶性不同時，恆有 $f(m,n)=f(\frac{m}{d},\frac{n}{d})$ ，其中 d 為 m 與 n 的最大公因數。

問題 2 ：(英國)

[解一]（試題委員會公布的解法）

見圖(a)，設 B',C'分別為 $\overline{AC},\overline{AB}$ 的中點，且令 $\theta=\angle BAU$ ，$\Phi=\angle UAC$ 。因為 WB' 為 $\overline{CA}$ 的中垂線，$\therefore \angle ACW=\angle WAC=\Phi$ ，同理 $\angle ABV=\angle BAV=\theta$ 。

因此，

$$\angle BTC=180^\circ-(\angle B-\theta+\angle C-\Phi)=\angle A+(\theta+\Phi)=\angle A+\angle A=2\angle A 。$$

在 ΔBTC 中，利用正弦定理，得

$$\frac{TB}{\sin(C-\Phi)}=\frac{TC}{\sin(B-\theta)}=\frac{BC}{\sin 2A}=\frac{2R\sin A}{\sin 2A}=\frac{R}{\cos A} ,$$

其中 R 為 ΔBTC 的外接圓半徑（注意由 $\cos A>0$ ，知 $C>\Phi,B>\theta$）。

於是，$TB+TC=\dfrac{R}{\cos A}(\sin(B-\theta)+\sin(C-\Phi))$

$$=\frac{2R\sin\frac{B+C-A}{2}\cos\frac{B-C+\Phi-\theta}{2}}{\cos A}=2R\cos\frac{B-C+\Phi-\theta}{2}$$ 。

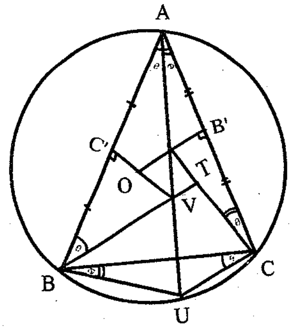
又 $\angle UBC=\angle UAC=\Phi,\angle UCB=\angle BAU$ ，故

$$AU=2R\sin(B+\Phi)=2R\sin(C+\theta)$$

$$=R(\sin(B+\Phi)+\sin(C+\theta))$$

$$=2R\sin\frac{B+C+A}{2}\cos\frac{B-C+\Phi-\theta}{2}$$

$$=2R\cos\frac{B-C+\Phi-\theta}{2}$$ ，



圖(a)

得證　AU=TB+TC 。

[解二](幾何法)

設圓 O 爲 ΔABC 之外接圓(如圖(b))，$\overleftrightarrow{BV}$ 交圓 O 於 B 、 E ，$\overleftrightarrow{CW}$ 交圓 O 於 C 、 F 。

$\because$ V 位於 $\overline{AB}$ 中垂線上，$\therefore \overline{AV}=\overline{BV}$ 。

又

$$\overline{AV}\cdot\overline{VU}=\overline{BV}\cdot\overline{VE}\text{(圓冪性質)}\Rightarrow\overline{VU}=\overline{VE}\Rightarrow\overline{AU}=\overline{AV}+\overline{VU}=\overline{BV}+\overline{VE}=\overline{BE}$$ ，

同理 $\overline{AU}=\overline{CF}$ 。

在 ΔTEC 中，$\angle E=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BUC}$ ，$\angle TCE=\frac{1}{2}\overset{\frown}{EAF}$ 。

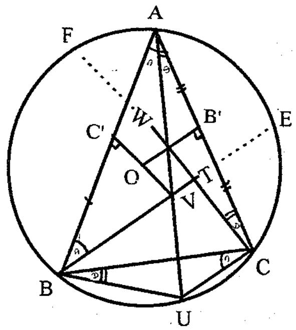
$\because \overline{AU}=\overline{CF}\therefore \overset{\frown}{FA}=\overset{\frown}{CU}$ 。

$\because \overline{AU}=\overline{BE}\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BU}$ 。

故得 $\overset{\frown}{BUC}=\overset{\frown}{BU}+\overset{\frown}{UC}=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{FA}=\overset{\frown}{EAF}$ 。

於是 $\angle E=\angle TCE\Rightarrow\overline{TE}=\overline{TC}$ 。

$\therefore \overline{TB}+\overline{TC}=\overline{TB}+\overline{TE}=\overline{BE}=\overline{AU}$ ，即 $\overline{AU}=\overline{TB}+\overline{TC}$ 。



圖(b)

[解三](解析幾何法)

如圖(c)，設點 A(0,1)， U(0,-1)，圓心 O(-α,0)。

令 $\overleftrightarrow{OV}$ 斜率爲 m ，$\overleftrightarrow{OW}$ 斜率爲 n ，經過繁雜但不難的計算得

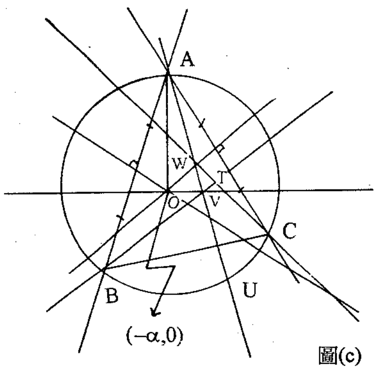
圓 O 方程式： $x^2+y^2+2\alpha x-1=0$ ，

$\overleftrightarrow{OV}$方程式：$y=mx+\alpha$，

$\overleftrightarrow{AB}$方程式：$y=-\frac{1}{m}x+1$，

$\overleftrightarrow{OW}$方程式：$y=n(x+\alpha)$，

$\overleftrightarrow{AC}$方程式：$y=-\frac{1}{n}x+1$，



圖(c)

再得 $B(\frac{2m(1-\alpha m)}{m^2+1},\frac{2\alpha m+m^2-1}{m^2+1})$，$C(\frac{2n(1-\alpha n)}{n^2+1},\frac{2\alpha n+n^2-1}{n^2+1})$，

$\overleftrightarrow{BV}$方程式：$y=\frac{x(m^2-1)+2\alpha m^2}{2m}$，$\overleftrightarrow{CW}$方程式：$y=\frac{x(n^2-1)+2\alpha n^2}{2n}$，

於是得 $T(\frac{-2\alpha mn}{mn+1},\frac{\alpha(m+n)}{mn+1})$。

計算 $\overline{BT}=\left|\frac{\alpha(m-n)-mn-1}{mn+1}\right|$，$\overline{CT}=\left|\frac{\alpha(m-n)+mn+1}{mn+1}\right|$。

於是 $\overline{BT}+\overline{CT}=2=\overline{AU}$，得證。

評析：

1.本題為英國設計提供，為一三角幾何題；原預估為適中題，考試結果在 460 位參賽者中，有 236 位(51%)得滿分，並有 164 位(36%)得 0 分，全體得分平均值為 3.90 分，難度指數 0.51，鑑別指數 0.88，為本屆六道題最簡易且鑑別度最高的試題。所有獲得金牌的 39 位選手都得滿分，而拿銀牌的 70 位選手得分的平均值亦高達 6.51 分，也幾乎得滿分(7 分)。我國 6 位選手得分的平均值為 5.83 分。顯然以我國學生在幾何上的專長，得到這個平均值仍然是偏低的。

2.解題評分重點：

(一)三角幾何部分

(1) $\angle BTC=2\angle A$　(2) ΔBTC 之正弦定律

(3) BT + CT 之表達式與計算　(4) AU 之表達式。

(二)平面幾何部分

(1)中垂線的性質　(2)圓冪定理

(3)等弦之特性　(4)證明 ΔTCE 為等腰三角形。

(三)解析幾何部分

(1)獲得 A、B、C，T 及 U 之坐標　(2)計算 $\overline{BT},\overline{CT},\overline{AU}$

(3)利用 T 在 ΔABC 內部，計算 $\overline{BT}+\overline{CT}$ 之值。

3.討論：

(1)我國六位學生代表，有五位得滿分，僅有一位失常，得分尚稱理想。

(2)本題有三種解法，其中以解法二最簡潔，解題品質最佳，解法一亦為良方，而解法三則仰賴正確的坐標取法，否則不易得證；我國學生應已熟悉這三種解法，但仍然有一位失手，非常可惜。

(3)我國學生陳明揚、張懷良、陳思妤採用三角幾何法解題跟解法一大同小異，但都分析得詳盡；廖健溢與黃柏凱則採用解法二解題，廖健溢的解法前半段跟解法二完全相同，解法尚佳。

問題 3：（俄羅斯）

[解答]（試題委員會公布的解法）

若 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ 是 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的一種排列，即存在一個一對一映成函數 $\pi:\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\to\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 使得 $\pi(x_i)=y_i$，$i=1,2,\ldots,n$，以 $S(\pi)$ 表 $y_1+2y_2+\ldots+ny_n$。令 $r=\dfrac{n+1}{2}$，我們將證明存在某一排列 π 滿足 $|S(\pi)|\le r$。

令 π_0 表示恆等排列，即 $\pi_0(x_i)=x_i$，$i=1,2,\ldots,n$，而令 δ 表示逆排列，即 $\delta(x_i)=x_{n-i+1}$，$i=1,2,\ldots,n$。若 $|S(\pi_0)|\le r$ 或 $|S(\delta)|\le r$，則證明完畢。今後假設 $|S(\pi_0)|>r$ 及 $|S(\delta)|>r$。由

$S(\pi_0)+S(\delta)=(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)+(x_n+2x_{n-1}+\ldots+nx_1)=(n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)$，得 $|S(\pi_0)+S(\delta)|=n+1=2r$。因 $|S(\pi_0)|>r$ 及 $|S(\delta)|>r$，得 $S(\pi_0)$ 與 $S(\delta)$ 異號。我們可從 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 經由連續的對調相鄰元素後得逆序排列 $x_n,x_{n-1},\ldots,x_1$，即 $\delta=\pi_m\circ\pi_{m-1}\circ\ldots\circ\pi_1\circ\pi_0$，其中 π_i 爲對調相鄰元素的排列，$i=1,2,\ldots m$。

所謂 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 是由 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ 對調相鄰元素的排列，即存在 k 滿足 $z_k=y_{k+1},z_{k+1}=y_k,z_j=y_j,j\ne k,k+1$。若令 δ_i 表排列 $y_1,y_2,\ldots,y_n$，而 δ_{i+1} 表排列 $z_1,z_2,\ldots,z_n$，則 $|S(\delta_{i+1})-S(\delta_i)|=|y_k-y_{k+1}|\le|y_k|+|y_{k+1}|\le 2r$。

令 $\delta_i=\pi_i\circ\pi_{i-1}\circ\ldots\circ\pi_0,i=0,1,2,\ldots,m$，則 $\delta_0=\pi_0,\delta_m=\delta$ 且 $|S(\delta_{i+1})-S(\delta_i)|\le 2r$。但 $S(\pi_0)$ 與 $S(\delta)$ 之值在區間 $[-r,r]$ 之外而且異側，因此存在 $i\in\{1,2,\ldots,m-1\}$ 使得 $|S(\delta_i)|\le r$。

評析：

1. 本題爲俄羅斯設計提供，爲一代數不等式的題目，主試委員會預估爲難題，考試結果在 460 位參賽者中，有 88 位(19%)得滿分，其中有 36 位最後得到金牌，也有 269 位(59%)得 0 分，全體得分的平均值爲 1.78 分，得分率 0.25，難度指數 0.37，屬本次六道試題中難度較難者，而其鑑別指數爲 0.69，也相當合理，所有獲得金牌的 39 位選手在本題的平均得分數爲 6.85 分，而拿到銀牌的 70 位選手得分之平均值爲 4.43 分，我國 6 位選手得分之平均值爲 1.33 分，顯然，平常訓練必須特別加強這類型的題目，才能求得較高的成績。
2. 解題評分重點：

(1)證明出存在有排列 π_1,π_2 使得 $S(\pi_1)<\dfrac{-(n+1)}{2}$ 且 $S(\pi_2)>\dfrac{n+1}{2}$，可得 3 分。

(2)經由相鄰元素的對調排列，而導出這種轉換的差至多是 n+1，又可得 3 分.

(3)最後由上面(1)及(2)的結果導出正確不等式的結果，再得 1 分。

(4)考慮太特別的情況，如 n=1，n=2 或 n=3 等，或處理 $x_1=x_2=\ldots=x_n$ 的特例，均不給部分分數。

3.討論：

(1)本題的解題技巧如下：

(a)先觀察

$|(1\cdot y_1+2\cdot y_2+\cdots+k\cdot y_k+(k+1)y_{k+1}+\cdots+n\cdot y_n)-(1\cdot y_1+2\cdot y_2+\cdots+k\cdot y_{k+1}$

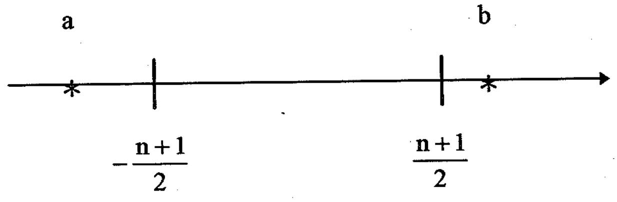
$+(k+1)\cdot y_k+\cdots+n\cdot y_n)| = |y_{k+1}-y_k| \le |y_{k+1}| + |y_k| \le (n+1)$，

也就是說把相鄰的兩數更換，它們的 $\sum iz_i$ 值最多相差 $n+1$。

(b)再找出兩個特殊排列 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 及 $(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)$，它們 $\sum iz_i$ 值的和的絕對值爲 $|(n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)|=n+1$。

(c)如果 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 及 $(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)$ 的 $\left|\sum iz_i\right|$ 值有一者小於或等於 $\frac{n+1}{2}$，則已得證，不然的話，他們的 $\sum iz_i$ 值必然是有一個大於 $\frac{n+1}{2}$，有一個小於 $\frac{-(n+1)}{2}$（由(b)得知）。

(d)由於 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 可經由左右元素不斷地有限次更換得到 $(x_n,x_{n-1},\ldots x_1)$，所以綜合上述的觀察，在更換過程中必然有一情況，它的 $\sum iz_i$ 值落於 $\left[\frac{-(n+1)}{2},\frac{n+1}{2}\right]$ 中，本題得證。



(換一次距離不超過 n+1)

(2)我們的學生未能突破解題技巧表現不理想，六位國手依序僅得到 1,0,1,3,1,2 分，共 11 分。這個問題第一個陷阱是利用歸納法，因爲 $|x_1+x_2+\cdots+x_n|=1$ 這個條件使得歸納時無法使用，除非有一 $x_i=0$；第二個陷阱，把元素按大小次序排列之後 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$，顯然，$\sum_{i=1}^{n} ix_{n-i+1} \le \sum_{i=1}^{n} ix_n$，如果已知 $x_1\ge 0$ 則 $(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)$ 這個排列可以符合題意，可是 $\sum_{i=1}^{n} ix_{n-i+1}$ 也可以是很小而無法使得它的絕對值 $\le\frac{n+1}{2}$。異於以往常見的存在性之組合性質，如：鴿籠原理，或是連續函數的定點定理，中間值定理，顯然這個題目是另一種離散型式的存在性質，可以作爲以後我們練習的參考問題。建議將來的訓練單元中，對於排列的性質要再加強，讓學生了解清楚。