

# 中學數學挑戰徵答題

設計者：通訊解題發掘數學資優生研究小組

◆本期徵答截止日期：民國 86 年 12 月 22 日；相關參考解答將刊於科學教育月刊第 206 期

問題編號

2011

若  $V_1, V_2, \dots, V_{1997}$  為一組平面向量，且每一個向量  $V_i$  之長度  $|V_i| \leq \sqrt{2}, i=1, 2, \dots, 1997$ ，試證可找到一組實數  $a_1, a_2, \dots, a_{1997}$ ，其中每個  $a_i = 1$  或  $-1, i=1, 2, \dots, 1997$ ，使得  $\left| \sum_{i=1}^{1997} a_i V_i \right| \leq 2$ 。

問題編號

2012

試確定所有質數  $p$ ，使得下列方程組

$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2 \end{cases} \quad \text{有整數解 } x, y。$$

問題編號

2013

設  $f$  為定義於正實數的實數值函數，

試確定滿足下列兩條件的所有函數  $f$ ：

(i)  $f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right)$ ，對任意正實數  $x, y$  均成立；

(ii)  $f(1) = 2$ 。

問題編號

2014

某兩人熟識，我們就稱此二人為一對朋友。今有一群人，計  $n$  位 ( $n \geq 3$ )，已知其中任意三人都至少有一對不是朋友，

試證此  $n$  個人中，“朋友總對數”  $\leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ 。

問題編號

2015

四面體  $ABCD$  中，兩對稜  $\overline{AB}, \overline{CD}$  的中點分別為  $M, N$ ，

證明：任一包含直線  $MN$  的平面將四面體  $ABCD$  的體積平分。

注：(1) 本徵答題係配合高二數學教學進度設計。

(2) 徵答題及其解答等相關資訊已出現於 WWW 網路上，

網址：<http://www.math.ntnu.edu.tw>