回答光仁中學林松潤老師所提的幾何問題

王惠中
國立臺灣師範大學數學系

正六邊形每邊延長（或縮短）成 k 倍，所得新正六邊形的面積是原正六邊形面積的 $k^2 - k+1$ 倍。林老師將此結果推廣至一般正多邊形，證得下述定理：

正 n 邊形每邊延長成 k 倍，所得新正 n 邊形的面積是原正 n 邊形面積的 $\alpha(k)$ 倍。其中 $\alpha(k) = 2k(k-1)(1-\cos(2\pi/n)) + 1$。

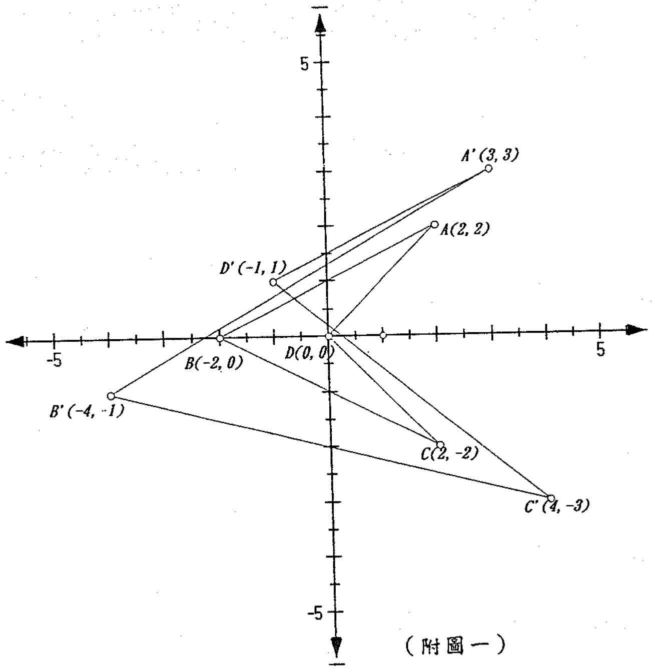
林老師又發現任意三角形及四邊形上述結果都正確。因此猜想是否能推廣至任意多邊形？任意三角形及凸四邊形的情形林老師的證明是正確的，但不能推廣至任意多邊形，

事實上對凹四邊形可能會形成某些邊互相交叉的情形，而一般 n 邊形$(n\geq 5)$，上述結果也不一定正確，舉例說明如下：

｛例一｝ 設 A(2,2), B(-2,0), C(2,-2), D(0,0), 則 ABCD 爲坐標平面上之一凹四邊形。今將 $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 各邊延長成 1.5 倍，分別延長至 A'(3,3), B'(-4,-1), C'(4,-3), D'(-1,1)（如附圖一）$\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$ 互相交叉，A'B'C'D' 不是一個正常的凸四邊形或凹四邊形。

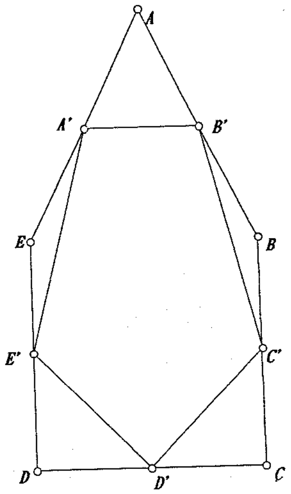
｛例二｝ 設凸五邊形 ABCDE，其中 BCDE 爲一邊長均爲 2 之正方形。而 Δ ABE 爲等腰三角形，其中 $AB = AE = \sqrt{5}$。因此五邊形 ABCDE 的面積爲 6。今取 $\overline{EA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$，各邊中點 A', B', C', D', E',得一新的五邊形 A'B'C'D'E'（ 如附圖二）。則新五邊形 A'B'C'D'E'的面積爲 4。但 4/6 = 0.666...，而 $\alpha(0.5) = (3+\sqrt{5})/8 = 0.654...$

｛例三｝設凸八邊形 ABCDEFGH， A(2,4), B(4,2), C(4,-2), D(2,-4), E(-2,-4), F(-4,-2), G(-4,2), H(-2,4)，今取 $\overline{HA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ 各邊中點 A'(0,4), B'(3,3), C'(4,0), D'(3,-3), E'(0,-4),F'(-3,-3), G'(-4,0), H'(-3,3) 得一新的八邊形 A'B'C'D'E'F'G'H'（如附圖三）。 八邊形 ABCDEFGH 的面積爲 56。新八邊形 A'B'C'D'E'F'G'H' 的面積爲 48。而 48/56 = 6/7 = 0.857..., 但 $\alpha(0.5) = 1/2 + \sqrt{2}/4 = 0.853....$



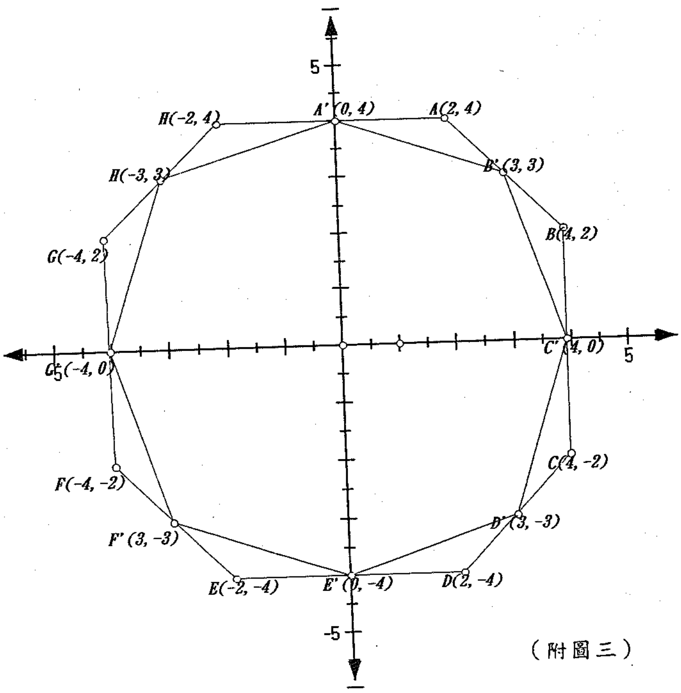
5
-5
A' (3, 3)
A(2, 2)
D' (-1, 1)
B(-2, 0)
D(0, 0)
B' (-4, -1)
C(2, -2)
C' (4, -3)

（附圖一）



A
A'
B'
E
B
E'
C'
D
D'
C

（附圖二）



5
-5
H(-2, 4)
A' (0, 4)
A(2, 4)
H(-3, 3)
B' (3, 3)
B(4, 2)
G(-4, 2)
C' (4, 0)
G' (-4, 0)
C(4, -2)
F(-4, -2)
D' (3, -3)
F' (3, -3)
E(-2, -4)
E' (0, -4)
D(2, -4)

（附圖三）