八十六年大學聯考數學試題評析

黃淑琴
大學入學考試中心研發處

八十六年大學聯考自然組數學的高、低標分別是55分與38分，社會組數學的高、低標則是58分與39分，是繼83年之後的低空盤旋(見表一、表二)，又一次的新高點。

今年試題，兼具了往年的特色，如：教材內容的分佈力求廣泛(見表三、表四)，各年級教材配分較平均(見表五、表六)，題型的配分較合理(見表七)等。

此外，今年的試題多半是非制式性的題目，即使需要計算，過程並不繁複，只要考生觀念清楚，自然能得心應手。

表一： 81~86 年大學聯考自然組數學高、低標

	81 年	82 年	83 年	84 年	85 年	86 年
高標	45	52	57	45	44	55
低標	29	33	39	31	32	38

表二： 81~86 年大學聯考社會組數學高、低標

	81 年	82 年	83 年	84 年	85 年	86 年
高標	48	55	50	36	40	58
低標	31	37	33	21	25	39

表三： 86 年大學聯考自然組數學教材內容配分表

教 材 內 容	題　號	配 分
數	塡充 1(4 分), 塡充 2(4 分)	8
函數與方程式	選擇 2, 選擇 4, 塡充 2(4 分), 塡充 3, 計算三(5 分)	28
幾何	選擇 1, 選擇 5, 塡充 1(4 分), 塡充 4, 計算三(10 分)	33
機率與統計	選擇 3, 塡充 6	13
微積分	塡充 5, 計算二	18

表四： 86 年大學聯考社會組數學教材內容配分表

教材內容	題號	配分
數	塡充 2, 塡充 3	14
函數與方程式	選擇 1(3 分), 塡充 4, 計算二	20
幾何	選擇 1(3 分), 選擇 2, 選擇 3, 選擇 4, 塡充 8, 計算三	38
機率與統計	塡充 1, 塡充 5, 塡充 6, 塡充 7	28

表五： 86 年大學聯考自然組數學各年級教材配分表

冊別	題號	配分
一	選擇 2, 塡充 1(4 分), 塡充 2(4 分)	13
二	塡充 1(4 分), 塡充 2(4 分), 計算三	23
三	選擇 1, 選擇 5, 塡充 3, 塡充 4	27
四	選擇 3, 塡充 6	13
理上	計算二	10
理下	選擇 4, 塡充 5	14

表六： 86 年大學聯考社會組數學各年級教材配分表

冊別	題號	配分
一	選擇 1(3 分), 塡充 2, 塡充 3, 塡充 4, 計算二	34
二	選擇 2, 選擇 4, 塡充 8	19
三	選擇 1(3 分), 選擇 3, 計算三	19
四	塡充 1, 塡充 5, 塡充 6, 塡充 7	28

表七：86年大學聯考數學試題題型配分表

題數與配分＼題型 組別		單選	多選	填充	計算
自然組	題　數	3	2	6	2
	配　分	15分	12分	48分	25分
社會組	題　數	2	2	8	2
	配　分	12分	12分	56分	20分

兩組試題的前四題皆是概念性的試題，內容分別是平行四邊形、平面區域與二元一次不等式、相關係數、矩陣、橢圓、餘弦函數、空間直線及向量。這些題目的設計新穎活潑，並且能測出考生是否具備與其相關的概念。

由於篇幅有限，筆者分別從自然組與社會組挑出五個問題，除提供其解法外，並談談試題的測驗目的。

自然組數學試題範例

例1.單一選擇題3

有學生十人（甲、乙、…、癸），其期考數學成績與該學期數學課缺課數，如下表所示。

學　生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸
缺課數	1	2	3	3	4	3	5	6	3	0
成　績	100	90	90	80	70	70	60	60	80	100

設兩者的相關係數為 r，則

(A) $-1 \le r \le -0.6$

(B) $-0.6 < r < -0.2$

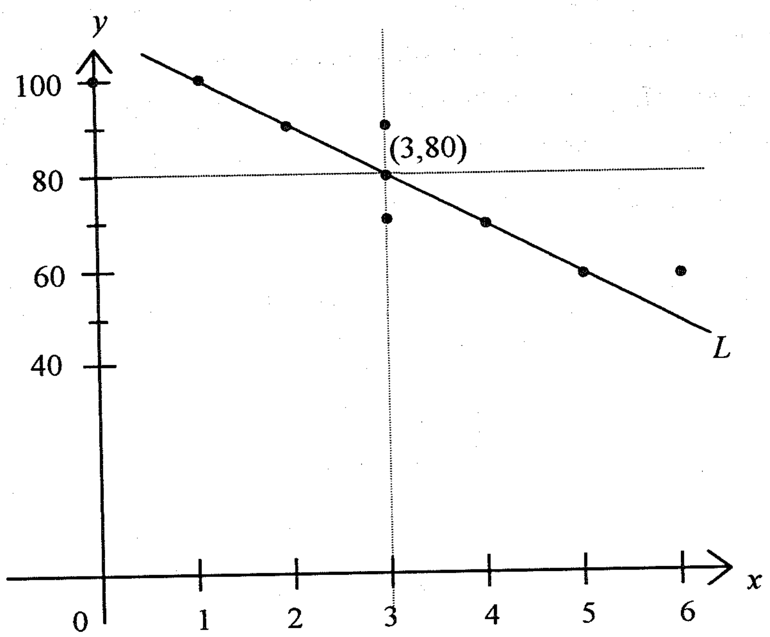
(C) $-0.2 \le r \le 0.2$

(D) $0.2 < r < 0.6$

(E) $0.6 \le r \le 1$

我們可以利用相關係數的公式求值，但是可能需要花一些時間計算。萬一公式沒記熟甚或忘記了，該怎麼辦？其實，這一題可以不經由計算得出答案，過程如下。

將缺課數與成績分別用變數 x, y 表示，並畫出缺課數與成績的散布圖。其次在散布圖上加畫兩條平均線 $x=3$ 與 $y=80$，將全圖分爲四個象限(見圖一)。由於各組資料的對應點多半在第二、四象限，也就是說 y 隨著 x 的增加而減少，因此這兩種變量爲負相關。另一方面，由圖一可知多數點散布在直線 L 上，故這兩種變量爲高度負相關，所以答案爲(A)。



例 2. 多重選擇題 4

設 A 、 B 、 C 皆為 3×3 矩陣，則下列敘述哪些是正確的？

(A) $AB=BA$ 恆成立

(B) $(AB)C=A(BC)$ 恆成立

(C)若 $AB=0$ 則 $A=0$ 或 $B=0$

(D)若 $\det(A)\neq 0$ ，且 $AB=AC$ ，則 $B=C$

(E) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 恆成立

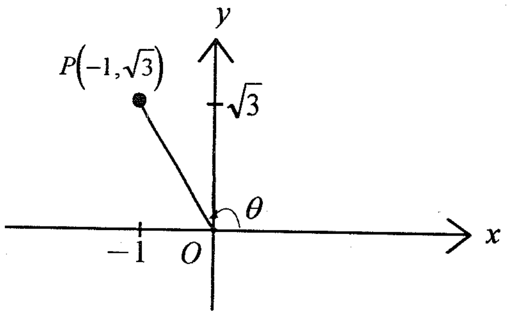
這一題是測驗矩陣運算的基本性質。矩陣乘法滿足結合律（即選項(B)），但不滿足交換律，故選項(A)與(E)是不正確的。再看看選項(D)，已知 $\det(A)\neq 0$，這就是矩陣 A 有乘法反元素的充要條件，所以 $A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)$，也就是說 $B=C$。選項(C)是個很好的問題，

相信有一部分的學生會落入陷阱。其實我們可以找到許多「兩個非零矩陣的乘積爲零矩陣」的例子，如：$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$。

例 3.填充題 1

若複數 z 與 $\sqrt{3}+i$ 之積為 $-2\sqrt{3}+2i$，則 z 的主輻角為 __(1)__。

這一題考的是複數的極式。由於複數的引進，使得解（實係數）一元 n 次方程式的問題有了完善的答案，但是學生對於複數的觀念依然模糊，原因是日常生活中並沒有用到複數的量。複數的極式即是了解複數的方法之一，這需要感謝直角坐標系，有了它，複數 $x+iy$ 與平面上的點 (x,y) 便有了一對一的對應關係。因此問題中的 $z=\dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i}=-1+\sqrt{3}i$ 對應平面上的一點 $P(-1,\sqrt{3})$（如圖二）。而 z 的主幅角 θ 就是以 x 軸正向爲始邊，$\overline{OP}$ 爲終邊的正向角，且介於0與 2π 之間，所以 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=\dfrac{2}{3}\pi$。



圖二

這個題目也可以應用複數的極式乘法公式來處理，即兩個複數相乘的主輻角等於這兩個複數的主輻角之和，因此

$$Arg(z)=Arg\left(-2\sqrt{3}+2i\right)-Arg\left(\sqrt{3}+i\right)=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$$

例 4.填充題 4

空間中有 A、B、C、D 四點。已知 $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，

$\angle ABC=\angle BCD=120^\circ$，而 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 之夾角為 60°，則 $\overline{AD}$ 之長= __(4)__。

由題目中線段長與角度的條件，容易與三角形的餘弦定理產生聯想，但是若邁向這個途徑時，便越發有山窮水盡疑無路之感。仔細想想「$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 之夾角爲 60°」這個條件是否能給我們一些靈感，似乎這一題與向量有關，但是究竟 $\overrightarrow{AD}$ 長與 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 的關係

是什麼？先想想向量分解的概念，也就是說將 $\overrightarrow{AD}$ 分解成若干個向量，可得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$。可是題目問的是長度，這與向量又是什麼關係？原來徵結在此，一個向量與本身的內積等於此向量之長度的平方，故

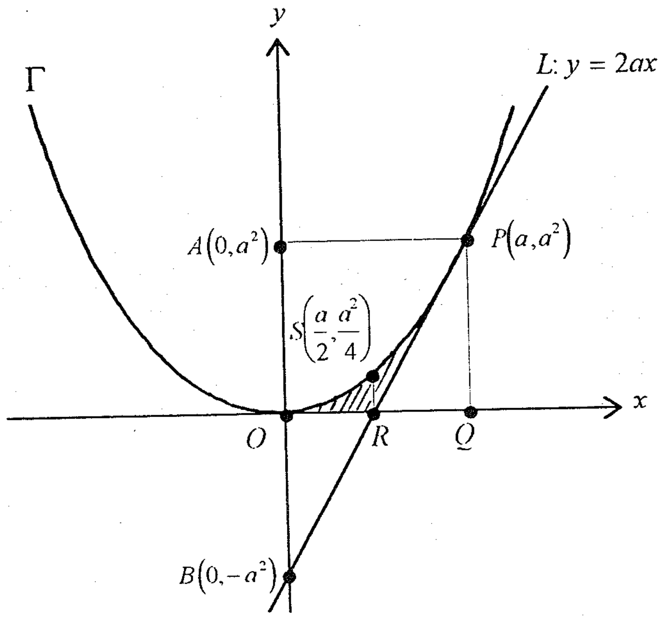
$$
\begin{aligned}
(\overline{AD})^2 &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\
&=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}\\
&=1^2+2^2+3^2+2\cdot1\cdot2\cdot\cos60^\circ+2\cdot2\cdot3\cdot\cos60^\circ+2\cdot3\cdot1\cdot\cos60^\circ\\
&=25
\end{aligned}
$$

即 $\overline{AD}=5$。向量的確妙用無窮，端賴個人如何運用，對這個題目而言，它給人一種柳暗花明又一村的讚嘆。

例 5.計算題二

設 P 為拋物線 $\Gamma:y=x^2$ 上之一點，其橫坐標為 a，且 $a>0$。又設 L 為過 P 點之切線，求由 Γ,L 及 x 軸所圍成區域之面積。

解微積分的問題，能作圖儘量作圖，以便直觀地了解問題。



圖三

這個題目相當於求圖三的斜線區域面積。因爲斜線區域不是一般的規則形狀（如矩形、圓等），自然要藉助積分。首先，找出點 R 的坐標。設 $f(x)=x^2$，因爲直線 L 與 Γ 相切於點 P，故 L 的斜率爲 $f'(a)=2a$。所以 L 的方程式爲 $y=2ax-a^2$。因爲 L 的 x 截距爲

$\frac{a}{2}$，故 R 的坐標爲 $\left(\frac{a}{2},0\right)$。其次，過點 P 作一與 x 軸垂直的直線，且交 x 軸於點 $Q(a,0)$；過點 R 作一與 x 軸垂直的直線，且交Γ於點 $S\left(\frac{a}{2},\frac{a^2}{4}\right)$。爲便於說明，設由 $\Gamma, y=0, x=\frac{a}{2}$ 所圍成的區域爲 Ω_1，由 $\Gamma, L, x=\frac{a}{2}$ 所圍成的區域爲 Ω_2，由 $\Gamma, y=0, x=a$ 所圍成的區域爲 Ω_3，由 $\Gamma, L, x=0$ 所圍成的區域爲 Ω_4，由Γ的右支 $x=\sqrt{y}, L：x=\frac{1}{2a}y+\frac{a}{2}, y=0$ 所圍成的區域爲 Ω_5（$=\Omega_1\cup\Omega_2$），由Γ的右支 $x=\sqrt{y}, x=0, y=a^2$ 所圍成的區域爲 Ω_6。則觀察圖三可知斜線區域面積的求法有很多種，現列舉五種：

方法一：Ω_1 的面積＋Ω_2 的面積$=\int_0^{\frac{a}{2}} x^2dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left[x^2-(2ax-a^2)\right]dx=\frac{a^3}{12}$

方法二：Ω_3 的面積－ ΔPQR 的面積$=\int_0^a x^2dx-\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times a^2=\frac{a^3}{12}$

方法三：Ω_4 的面積－ ΔOBR 的面積$=\int_0^a\left[x^2-\left(2ax-a^2\right)\right]dx-\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times a^2=\frac{a^3}{12}$

方法四：Ω_5 的面積$=\int_0^{a^2}\left[\left(\frac{1}{2a}y+\frac{a}{2}\right)-\sqrt{y}\right]dy=\frac{a^3}{12}$

方法五：梯形 $OAPR$ 的面積－Ω_6 的面積$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right)a^2-\int_0^{a^2}\sqrt{y}\ dy=\frac{a^3}{12}$

社會組試題範例

例 1.單一選擇題 2

如右圖，單位圓 O 與 y 軸交於 A、B 兩點。角 θ 的頂點為原點，始邊在 x 軸的正向上，終邊為 $\overrightarrow{OC}$，直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 垂直於 y 軸且與角 θ 的終邊交於 C 點。則下列那一個函數值為 $\overline{AC}$？

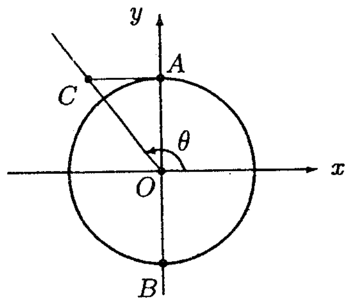
(A) $|\sin\theta|$

(B) $|\cos\theta|$

(C) $|\tan\theta|$

(D) $|\cot\theta|$

(E) $|\sec\theta|$



這一題雖然是要以一個三角函數來表示 $\overline{AC}$ 的長，事實上是考三角函數的定義。由於 $\overline{OA}=1$，故點 C 的坐標可設爲 $(x,1)$，其中 $x<0$。因此 $\overline{AC}=\left|\frac{x}{1}\right|=|\cot\theta|$。這是一個很有趣的題目，雖然涉及的觀念不難，相信也讓許多學生感到困惑。大部分的學生比較習慣以一

個直角三角形的三邊長來定義三角函數，如何將定義推廣至廣義角的三角函數，對學生而言是非常重要的概念，所以學生在學習時不妨注意。

例 2. 多重選擇題 3

在空間中，下列選項中的方程組，何者圖形為一直線？

(A) $3x+2y+z=1$，$6x+4y+2z=5$　(B) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-2 \\ z=3 \end{cases}$　t 為任意實數

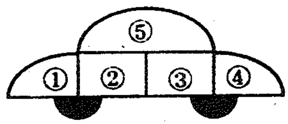
(C) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z-5}{3}$　(D) $2x+y=1$

(E) $x+y-2z=0$, $x-2y+z=1$, $2x-y-z=1$

這一題是測驗學生空間直線方程式的概念。選項中的(B)和(C)分別是空間直線的參數方程式和對稱比例式，所以皆爲正確的選項。其餘的三個選項皆與三元一次方程式有關，我們知道三元一次方程式的圖形是一空間平面，故(D)的圖形不是一直線。但是有很多學生誤選(D)，這是個值得老師們注意的現象。學生都知道二元一次方程式在平面直角坐標系的圖形是一直線，然而，也有很多學生誤以爲空間直線的方程式是一個三元一次方程式。誤選(D)的學生若不是犯了這個錯誤，就是立刻將 $2x+y=1$ 與平面坐標系的直線產生聯想，因而忽略了 $2x+y=1$ 是置身空間的假設。

選項(A)中的兩個方程式，除了常數項之外，其餘的係數成比例，即這兩個平面平行（不相交），故圖形爲 ϕ。選項(E)的前面兩個方程式的和正好是第三個方程式，所以這個三元一次方程組有無窮多組解。空間三平面的交集包含無窮多個點的情形只有兩種：三平面重合或三平面相交成一直線，因爲(E)中任意兩個方程式的 x, y, z 係數皆不成比例，故三個平面不重合，所以必相交成一直線。

例 3. 填充題 1



用五種不同顏色塗右圖中五個空白區域，相鄰的區域塗不同顏色，則共有 __(1)__ 種塗法。

爲了便於說明，分別在五個空白區域上標示①,②,③,④,⑤（如圖所示）。現在要爲這五個區域塗色，有五種顏色可供選擇，條件是相鄰的區域不能出現相同的顏色。先選定其中的一個區域上色，然後將相鄰的區域漸漸塗完。假設塗色區域的先後順序爲①→②→③→⑤→④，也就是說先從區域①開始，由五種顏色當中挑選一種，共有 5 種可能性。然後在區域②塗色，由於不能與區域①同色，故只剩 4 種顏色可供選擇。接著在區域③塗色，只要不與區域②的顏色重複即可，故仍有 4 種選擇（注意：區域①與區域③可同色）。同

理，區域⑤不能與區域②及③同色，所以有 3 種選擇；區域④則有 4 種選擇。因此，總共有 $5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 4 = 960$ 種塗法。

第一個塗色的區域不一定非從①開始，任何一個皆可，最後的答案是一樣的。只不過塗色的方式最好是先將相鄰的區域漸漸塗完，否則，需分類討論。如：假設塗色區域的先後順序爲①→③→②→⑤→④，即先從區域①開始塗色，如果選擇區域③作爲第二個塗色區域，則有兩種情形：區域①與③同色或不同色。

若區域①與③同色，則共有5種顏色可供選擇。那麼區域②有4種選擇，區域⑤有3種選擇，區域④有4種選擇。所以這種情形有種 $5\times4\times3\times4=240$ 塗法。

若區域①與③不同色，則共有 5×4 種塗法。接下來區域②只有3種選擇，區域⑤有3種選擇，區域④有4種選擇。所以這種情形有 $5\times4\times3\times3\times4=720$ 種塗法。因此兩種情形共有960種塗法。

例 4.填充題 4

設方程式 $x^4+3x^3+bx+cx+10=0$ 有四個相異有理根，則其最大根為__(4)__。

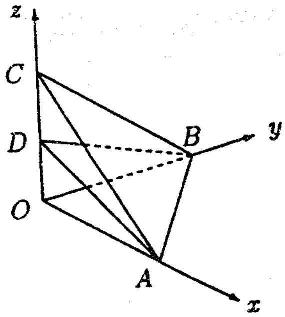
這一題是源自於課本第一冊第五章的習題所改編，由於少了「b，c是整數」的條件，導致答案不止一個的情形，成爲今年媒體所報導的爭議題。姑且不論其是否爲爭議題，先來看看這個題目。設 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 爲此方程式之四個相異有理根，則 $x^4+3x^3+bx+cx+10=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$。所以 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$ 且 $\alpha\beta\gamma\delta=10$。也就是說，這個題目要我們找四個相異有理數，其和爲 -3，其積爲10。

首先，如果 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 皆爲整數（即 b，c是整數），注意10的因數有 $\pm1,\pm2,\pm5$ 與 ±10，因爲 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 相乘等於10，故 ±10 絕非此方程式的解。所以只剩下兩種可能性：$(-1,1,2,-5)$ 與 $(-1,1,-2,5)$，其中只有第一組解的和是 -3，故2爲最大根。

如果 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 不是整數，就有許多組解，如：$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},5,-8\right)$ 、$\left(-\frac{1}{9},\frac{1}{9},27,-30\right)$ 等。總之，少了「b，c是整數」的條件時，相對地提高了題目的難度，只要考生答中其中的一組解，實難能可貴。

例 5.計算題三

在右圖的空間坐標中，O 為原點，點 A、B、C 分別位於 x 軸、y 軸、z 軸上，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 且 D 為 $\overline{OC}$ 的中點，求 O 到平面 ABC 與 O 到平面 ABD 的距離之比。



這是一個頗具特色的空間幾何問題，題目要我們找出點O到平面ABC與點O到平面ABD的距離之比。如果平面的方程式是已知的話，點到平面的距離是很容易求出的，但是問題中的已知條件只有線段長的關係，甚至沒有給定三點A,B,C的坐標，問題似乎不簡單。儘管如此，還是可以借助空間坐標系來解決，因爲$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=2\overline{OD}$，且$A,B,C,D$皆位在坐標軸上，如果設點$A$的坐標爲$(a,0,0)$，則根據已知條件，點$B,C,D$之坐標分別爲$(0,a,0)$, $(0,0,a)$, $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$。故平面$ABC$與平面$ABD$的方程式分別爲$x+y+z=a$及$x+y+2z=a$。因此點$O$到平面$ABC$與點$O$到平面$ABD$的距離之比爲

$$\frac{|a|}{\sqrt{3}}:\frac{|a|}{\sqrt{6}}=\sqrt{2}\ :\ 1$$

像自然組的例1、例2及社會組的例1、例2只測驗概念並不涉及太多計算的試題，不僅能鑑別學生的觀念是否清楚，也是非常重要的命題方向之一。但是也由於這一類概念性試題不涉及太多計算，而不被重視，這是值得我們深思的。

給學生的建議

數學的美，不在於它的外表，而在於內涵。我們在學校接受長期的數學訓練，不僅要學習其內容和培養嚴謹的邏輯思維，更重要的是讓自己具備分析與解決問題的能力。究竟有什麼秘訣可以學好數學？最好的方法莫過於多做、多想、多問。

這次大學聯考，有些人考數學時，題目越做越感興趣，猶如飲山中清泉，甘之如飴；有些人食之無味，但棄之可惜(多少可增加一些分數)。各位同學，你對這份試題的感覺如何呢?