中學數學挑戰徵答題參考解答評析

通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 1036

直角三角形 ABC，其中 $\angle C = 90°$。設 M 爲 $\overline{BC}$ 邊的中點，M 到斜邊 $\overline{AB}$ 的距離爲 d。

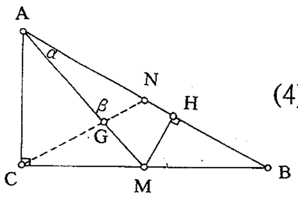
證明：$d \le \frac{1}{3}\overline{AM}$。

解答：證明：

證法（一）：(1).如圖，過 M 作 $\overline{MH} \perp \overline{AB}$，則 $\overline{MH} = d$，欲證 $d \le \frac{1}{3}\overline{AM}$。

(2).設 $\angle BAM = \alpha$ 則 $\sin\alpha = \dfrac{d}{\overline{AM}}$，也就是欲證 $\sin\alpha \le \frac{1}{3}$。

(3).過 C 作 $\overline{AB}$ 的中線 $\overline{CN}$，令 $\overline{AM}$ 與 $\overline{CN}$ 交於 G，則 G 爲 ΔABC 的重心。所以 $\overline{GN} = \frac{1}{3}\overline{CN}$。又 $\overline{CN}$ 爲斜邊中線，所以 $\overline{CN} = \overline{AN}$，即得 $\overline{GN} = \frac{1}{3}\overline{AN}$。



(4).在 ΔAGN 中，由正弦定律：（令 $\angle AGN = \beta$）

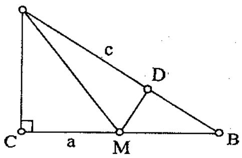
$\dfrac{\sin\alpha}{\overline{GN}} = \dfrac{\sin\beta}{\overline{AN}}$，所以 $\sin\alpha = \dfrac{\overline{GN}}{\overline{AN}}\sin\beta = \frac{1}{3}\sin\beta$，但是 $\sin\beta$ 恆小於等於 1，所以 $\sin\alpha \le \frac{1}{3}$，即可得證 $d \le \frac{1}{3}\overline{AM}$。

證法（二）：（綜合幾何證題法，採自建中蔡忠潤、楊益昇；彰中施純儒、李伯浩及南一中王泓民之解法）

已知：$\angle C = 90°$，$\overline{MD} \perp \overline{AB}$，$\overline{CM} = \overline{BM}$，$\overline{MD} = d$

證明：取 $\overline{AB}$ 中點 N，連 $\overline{CN}$ 交 $\overline{AM}$ 於 P，P 爲重心，連 $\overline{MN}$

$\because P$ 爲重心，$\therefore \overline{PM} = \frac{1}{3}\overline{AM}$



$\because \overline{AM}$，$\overline{CN}$ 爲中線，$\therefore \overline{NM} \parallel \overline{AC}$

又 $\angle C = 90°$，易證 $\Delta BNM \cong \Delta CNM$，

過 M 作 $\overline{MH} \perp \overline{NC}$ 於 H，$\therefore \overline{DM} = \overline{MH}$

$\because \overline{MH} \perp \overline{NC}$，$\therefore \overline{PM} \ge \overline{MH}$，即 $\frac{1}{3}\overline{AM} \ge d$

（當 $\overline{AM}\perp\overline{CN}$ 時，等號成立）

證法（三）：（面積法，採自北興國中蔡明劼之解法，台師大附中林建位）

證明：令三角形 ABC 邊長 a，b，c

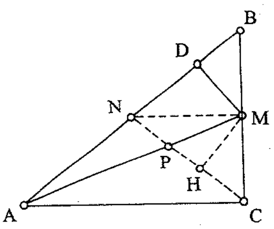
$$\overline{AM}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}\text{（商高定理）}$$

$$\because \Delta ACM+\Delta AMB=\Delta ABC$$

$$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times b+\frac{1}{2}\times c\times d=\frac{1}{2}\times a\times b$$

$$\Rightarrow d=\frac{ab}{2c}=\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\overline{AM}^2-9d^2=\frac{a^2}{4}+b^2-\frac{9}{4(a^2+b^2)}=\frac{a^4-4a^2b^2+4b^4}{4(a^2+b^2)}$$



$$=\frac{(a^2-2b^2)^2}{4(a^2+b^2)}\geq 0$$

$\therefore \overline{AM}^2\geq 9d^2$，又 $\overline{AM}>0$，$d>0$

$$\therefore \overline{AM}\geq 3d\Rightarrow d\leq\frac{\overline{AM}}{3}$$

證法（四）：（解析法，如武陵高中黃世昌；台師大附中國一陳泊寧等，證法略）

《解題重點》：（針對證法（一）而言）

1.欲證 $d\leq\frac{1}{3}AM\Leftrightarrow\frac{d}{AM}\leq\frac{1}{3}$ 而 $\frac{d}{AM}$ 恰是 $\sin\alpha$。

2.三角形重心性質與直角三角形斜邊中線性質。

3.正弦定律。

4.$\sin\beta\leq 1$，對任意角 β。

《評析》

1. 本題配合三角正弦定律題材而命題，在本次五道題中，參與徵答人數最多，計有彰化高中李伯浩等 83 位，其中還包括二位國中生（台師大附中國一陳泊寧及北興國中二年級蔡明劼）得分率 0.99，幾乎滿分，完全符合原先之預估。
2. 此問題證法很多，有綜合幾何證明法，幾何三角混合證法，也有解析法，演算過程有的簡潔有力，有的挺繁瑣，其中武陵高中黃世昌；台師大附中國一陳泊寧證法頗簡潔易懂。
3. 本題等號成立的充要條件是一股長爲另一股長的 $\sqrt{2}$ 倍，（參見證法（三）。）

4. 本題答對者中用正弦定理解題的有 7 人；用綜合幾何解題的有 69 人；用面積法解題的有 2 人；用解析法解題的有 5 人；用相似三角形解題的有 3 人。

問題編號 1037

設 a,b,c 分別爲 ΔABC 的三邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 的邊長，m_a，m_b，m_c 分別爲 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 三邊的中線長，R 爲 ΔABC 的外接圓的直徑。

證明：$\dfrac{a^2+b^2}{m_c}+\dfrac{b^2+c^2}{m_a}+\dfrac{c^2+a^2}{m_b}\leq 6R$，並求等號成立的充要條件。

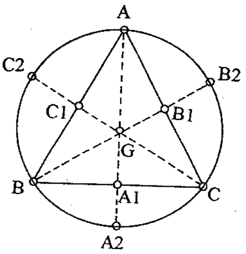
解答：證明：

證法（一）：第一部分：

(1).如圖 ΔABC，作 ΔABC 的外接圓，此圓的直徑爲 R。

(2).設 A_1,B_1,C_1 分別爲三邊的中點，則 $AA_1=m_a$，$BB_1=m_b$，$CC_1=m_c$。

(3).連接中線並延長分別交外接圓於 A_2,B_2,C_2，則 $AA_2\leq R$，$BB_2\leq R$，$CC_2\leq R$（因爲直徑是最長的弦），由此可知 $m_a+A_1A_2\leq R$，$m_b+B_1B_2\leq R$，$m_c+C_1C_2\leq R$。



(4).由圓冪定理知：$A_1A_2\times AA_1=BA_1\times A_1C$，即得 $A_1A_2=\dfrac{a^2}{4m_a}$，

同理可證 $B_1B_2=\dfrac{b^2}{4m_b}$，$C_1C_2=\dfrac{c^2}{4m_c}$。

(5).由(3)，(4)可得 $m_a+\dfrac{a^2}{4m_a}\leq R\Rightarrow\dfrac{4m_a{}^2+a^2}{4m_a}\leq R$，

由中線定理知 $4m_a{}^2+a^2=2b^2+2c^2$，因此 $\dfrac{b^2+c^2}{2m_a}\leq R$，

同理可證：$\dfrac{c^2+a^2}{2m_b}\leq R$ 且 $\dfrac{a^2+b^2}{2m_c}\leq R$。

(6).由(5)可得證 $\dfrac{a^2+b^2}{m_c}+\dfrac{b^2+c^2}{m_a}+\dfrac{c^2+a^2}{m_b}\leq 6R$。

第二部分：

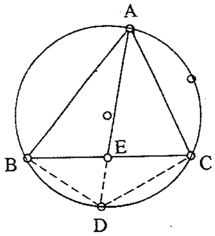
欲使"等號成立"$\Leftrightarrow AA_2=R$ 且 $BB_2=R$ 且 $CC_2=R$，也就是弦 $\overline{AA_2}$，$\overline{BB_2}$，$\overline{CC_2}$ 都是直徑，即三中線都是通過圓心，因此中線都必須是中垂線，所以 ΔABC 必爲正三角形。因此"等號"成立的充要條件是 ΔABC 爲正三角形。

證法（二）：（採自武陵高中黃世昌、李仁傑；嘉中蘇泓洸等之證法）

1.設 $\overline{BC}$ 中點 E，並延長 $\overline{AE}$ 交圓於 D，連接 $\overline{BD}$，$\overline{CD}$。

2.$\because$ $ABDC$ 爲圓內接四邊形，$\therefore \Delta AEC \sim \Delta BED$

$$\Rightarrow \frac{b}{m_a}=\frac{\overline{BD}}{\frac{a}{2}}=\frac{2}{a}\cdot\overline{BD}$$



3. $\dfrac{b^2}{m_a}=b\cdot\dfrac{b}{m_a}=\dfrac{2}{a}(b\cdot\overline{BD})$，同理 $\dfrac{c^2}{m_a}=\dfrac{2}{a}(c\cdot\overline{CD})$。

則 $\dfrac{b^2+c^2}{m_a}=\dfrac{2}{a}(b\cdot\overline{BD}+c\cdot\overline{CD})$，

又由托勒密定理知 $b\cdot\overline{BD}+c\cdot\overline{CD}=\overline{AD}\cdot a$，

故 $\dfrac{b^2+c^2}{m_a}=\dfrac{2}{a}\cdot\overline{AD}\cdot a=2\overline{AD}\le 2R$，

當 $\overline{AD}$ 爲直徑即 $b=c$ 時，等號成立

同理 $\dfrac{c^2+a^2}{m_b}\le 2R$，$\dfrac{a^2+b^2}{m_c}\le 2R$

$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\le 6R$$

等號成立的充要條件爲 ΔABC 爲正三角形

《解題重點》

1.作 ΔABC 的外接圓，並分別延長三中線爲三弦。

2.圓冪定理：兩弦 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 交於 P，則 $\overline{AP}\cdot\overline{PB}=\overline{CP}\cdot\overline{PD}$。

3.中線定理：$2a^2+2b^2=4{m_c}^2+c^2$。

4.任意一弦長不大於直徑。

5. ΔABC 三中線都通過圓心時，中線必爲中垂線。

《評析》

1. 本題配合平面幾何題材命題，徵答人數較少，僅有南一中劉育廷等 38 位，惟得分率 0.93，堪稱理想。

2. 此問題證法各異其趣，引入三角函數關係式證明者較多，但有些轉換較繁瑣，也有綜合幾何證題者引用"孟氏定理"或"托勒密定理"證明，如武陵高中黃世昌、李仁傑；嘉中蘇泓洸利用托勒密定理證之；武陵高中鍾隆興、南一中劉育廷引

孟氏定理證明，但各有不同，也都是有創意之作。

3. 本題答對者中用中線定理解題的有 16 人；用托勒密定理解題有 11 人；用正弦定理解題的有 9 人；用解析法解題的有 1 人。

問題編號 1038

設 $\overline{BM}$，$\overline{BD}$ 分別為 ΔABC 的中線與分角線，$M \neq D$ 且都在 $\overline{AC}$ 邊上。$\overline{BN}$ 是中線 $\overline{BM}$ 關於分角線 $\overline{BD}$ 的對稱線，N在 $\overline{AC}$ 邊上。

證明：$\dfrac{AN}{CN} = (\dfrac{AD}{CD})^2$。

解答：證明：

證法（一）：(1).如圖，設 $\angle ABM = \alpha$，$\angle MBD = \beta$，則 $\angle DBN = \beta$，$\angle NBC = \alpha$。

(2).在 ΔABN 中，由正弦定律知：

$\dfrac{AB}{\sin\angle ANB} = \dfrac{AN}{\sin\angle ABN}$，令 $\angle ANB = r$，$AB = c$，

則 $\dfrac{c}{\sin r} = \dfrac{AN}{\sin(\alpha + 2\beta)}$ ……①

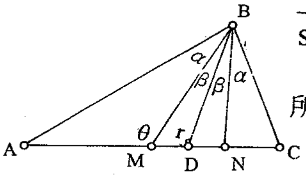
(3).在 ΔAMB 中，由正弦定律知：

$\dfrac{AB}{\sin\angle AMB} = \dfrac{AM}{\sin\angle ABM}$，令 $\angle AMB = \theta$，

則 $\dfrac{c}{\sin\theta} = \dfrac{AM}{\sin\alpha}$ ……②

(4).由①②相乘得 $\dfrac{c^2}{\sin\gamma\sin\theta} = \dfrac{AN \cdot AM}{\sin(\alpha+2\beta)\sin\alpha}$ ……③

(5).在 ΔBNC與ΔBMC 中，仿(3)，(4)由正弦定律得



$\dfrac{a}{\sin(\pi-\gamma)} = \dfrac{NC}{\sin\alpha}$ 且 $\dfrac{a}{\sin(\pi-\theta)} = \dfrac{MC}{\sin(\alpha+2\beta)}$

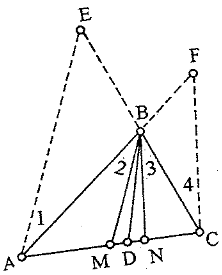
所以 $\dfrac{a^2}{\sin\gamma\sin\theta} = \dfrac{NC \cdot MC}{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}$(其中$a = BC$) ……④

(6).③與④相除得 $\dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{AN \cdot AM}{NC \cdot MC} = \dfrac{AN}{CN} = (\dfrac{c}{a})^2 = (\dfrac{AD}{CD})^2$。

證法（二）：（採自台師大附中王世豪等之解法）

證明：本題為特例，先證明一般情形：

在 ΔABC 中，$\overline{BD}$ 為分角線，M，N在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{BM}$與$\overline{BN}$ 關於 $\overline{BD}$ 對稱，



則在$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{AB}$延長線上各取一點E，F，使得$\overline{AE} // \overline{BM}$，$\overline{CF} // \overline{BN}$，則，

$\dfrac{AN}{CN}=\dfrac{AB}{BF}$，$\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{BE}{BC} \Rightarrow \dfrac{AN}{CN}\cdot\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{AB}{BF}\cdot\dfrac{BE}{BC}$

而$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$，$\angle ABE=\angle CBF$(對頂角)

$\therefore \Delta ABE \sim \Delta CBF$（AA相似)）$\Rightarrow \dfrac{BE}{BF}=\dfrac{AB}{BC}$

$\therefore \dfrac{AN}{CN}\cdot\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{AB}{BC}\cdot\dfrac{BE}{BF}=(\dfrac{AB}{BC})^2=(\dfrac{AD}{DC})^2$

即$\dfrac{AN}{CN}\cdot\dfrac{AM}{MC}=(\dfrac{AD}{DC})^2$，本題$\dfrac{AM}{MC}=1$，故$\dfrac{AN}{CN}=(\dfrac{AD}{CD})^2$。

《解題重點》

1. $\overline{BD}$爲$\overline{BM}$與$\overline{BN}$的對稱軸。
2. 正弦定律。
3. $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$，$\theta$爲任意角。
4. 三角形內分角線比例性質。

《評析》

1. 本題亦配合三角正弦定律題材而命題，參與徵答者計有台中女中萬佳育等 42 位，得分率 1.00，即每位徵答者都得滿分，此爲本年度的 40 道題中，唯一都得滿分的題目。
2. 大部分徵答同學解法與試題綜合研究小組方法雷同，有少部分同學用綜合幾何法證明，作法甚佳。其中台師大附中王世豪同學證明更一般化的性質且證法獨特，有創意。
3. 本題答對者中用正弦定理解題的有 9 人；用相似三角形解題的有 10 人；用面積法解的有 20 人；用孟氏定理解題的有 2 人；用綜合幾何解題的有 1 人。

問題編號 1039

設函數$f(x,y)=2x^2-6xy+5y^2$，其中x,y爲任意整數，

（1）所有不大於 86 的函數值共有多少個?

（2）證明任意兩個$f(x,y)$函數值的乘積仍然是$f(x,y)$的函數值。

（即證明：對於任意整數u_1，v_1，u_2，v_2，必存在整數u，v，使$f(u,v)=f(u_1,v_1)\times f(u_2,v_2)$）。

解答：（1）對任意x,y，$f(x,y)=2x^2-6xy+5y^2$

$$=(x^2-2xy+y^2)+(x^2-4xy+4y^2)$$
$$=(x-y)^2+(x-2y)^2$$

由此結果可知：$f(x,y)$必為兩整數的平方和，

反之，對任意兩整數 u ，v，取$x=2u-v$，$y=u-v$時，

則$f(x,y)=(x-y)^2+(x-2y)^2=u^2+v^2$，此時 x,y 均為整數。

因此，任意兩整數的平方和必為函數$f(x,y)$的某個函數值，

欲使$f(x,y)\le 86$，有下列的情況：

$1=1^2+0^2$，$2=1^2+1^2$，$4=2^2+0^2$，$5=2^2+1^2$，$8=2^2+2^2$

$9=3^2+0^2$，$10=1^2+3^2$，$13=2^2+3^2$，$16=4^2+0^2$，$17=1^2+4^2$

$18=3^2+3^2$，$20=2^2+4^2$，$25=5^2+0^2$，$26=1^2+5^2$，$29=2^2+5^2$

$32=4^2+4^2$，$34=3^2+5^2$，$36=6^2+0^2$，$37=1^2+6^2$，$40=2^2+6^2$

$41=4^2+5^2$，$45=3^2+6^2$，$49=7^2+0^2$，$50=5^2+5^2$，$52=4^2+6^2$

$53=2^2+7^2$，$58=3^2+7^2$，$61=5^2+6^2$，$64=8^2+0^2$，$65=8^2+1^2$

$68=2^2+8^2$，$72=6^2+6^2$，$73=3^2+8^2$，$74=5^2+7^2$，$80=4^2+8^2$

$81=9^2+0^2$，$82=9^2+1^2$，$85=9^2+2^2$，$0=0^2+0^2$共有39個

（2）由(1)的推論可知：

設任意整數u_1，v_1，u_2，v_2則存在x_1，y_1，x_2，y_2整數，

使$f(u_1,v_1)\times f(u_2,v_2)=(x_1{}^2+y_1{}^2)(x_2{}^2+y_2{}^2)$

$$=x_1{}^2x_2{}^2+x_2{}^2y_1{}^2+x_1{}^2y_2{}^2+y_1{}^2y_2{}^2$$
$$=(x_1{}^2x_2{}^2+y_1{}^2y_2{}^2+2x_1x_2y_1y_2)+(x_1{}^2y_2{}^2+x_2{}^2y_1{}^2-2x_1y_2x_2y_1)$$
$$=(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

由(1)知，必存在整數 u ，v

使$f(u,v)=(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2=f(u_1,v_1)\times f(u_2,v_2)$

此命題得證。

《解題重點》

1.多項式轉化$f(x,y)=2x^2-6xy+5y^2=(x-y)^2+(x-2y)^2$。

2.任意兩整數 u ，v的平方和必為函數$f(x,y)$的函數值。

3.窮舉 1 到 86 中，可為兩整數平方和的數。

4.$(a^2+b^2)(u^2+v^2)=(au+bv)^2+(av-bu)^2$。

《評析》

1. 本題配合代數題材而命題，計有雄中盧佑群等 39 人參與徵答，得分率 0.85，尚稱理想。
2. 本題徵答者較少，全做對的同學也較少，有部分同學討論不等式的整數根解之，答案不容易正確。也有部分同學第二部分沒討論。
3. 本題答對者中用窮舉證法解題的有 30 人。

問題編號 1040

將所有的正整數排成沒有相同元素的兩個增數列$\langle a_n\rangle$，$\langle b_m\rangle$且此兩數列滿足：

(*i*) $a_1=1$；

(*ii*) $a_i+a_j\neq 2^k+2$，(k=0,1,2,……)，a_i,a_j為$\langle a_n\rangle$中任意兩相異項；

(*iii*) $b_i+b_j\neq 2^k+2$，(k=0,1,2,……)，b_i,b_j為$\langle b_m\rangle$中任意兩相異項。

（1）證明：滿足這些條件的數列$\langle a_n\rangle$，$\langle b_m\rangle$恰有一組。

（2）確定 1997，1998 各在那個數列裡。

解答：（1）因為$a_1=1$且$1+2=2^0+2$，所以 2 必在$\langle b_m\rangle$中且$b_1=2$。

（2）$1+3=4=2^1+2$，所以 3 也在$\langle b_m\rangle$中。

（3）假設小於正整數 c（$c\geq 4$）的所有正整數都恰在$\langle a_n\rangle$與$\langle b_m\rangle$兩數列中的一數列裡，且滿足(*i*)，(*ii*)，(*iii*)條件。

採用數學歸納法證明：c 必恰在$\langle a_n\rangle$，$\langle b_m\rangle$兩個數列中的某一個數列裡，

對 c 而言（$c\geq 4$），存在一個正整數 t，使$2^t\leq c<2^{t+1}$，

下面分幾個情形討論：

①若$c=2^t$（$t>1$），則對任意$\langle a_n\rangle$中小於 c 的數 a 而言，

因為 2 在$\langle b_m\rangle$中，所以$c=2^t<2^t+a<2(2^t)=2^{t+1}$，

也就是$c+a$不可能是2^k+2，(k=0,1,2,……)型的數，

所以將 c 放入$\langle a_n\rangle$數列裡。

②若$c=2^t+1$，則$1+c=2^t+2$，必須將 c 放入$\langle b_m\rangle$數列裡，

此時對任意$\langle b_m\rangle$中，小於 c 的數 d，$c+d$不可能是2^k+2型，

所以將 c 放入$\langle b_m\rangle$數列中，滿足(*i*)，(*ii*)，(*iii*)條件。

③若$2^t+1<c<2^{t+1}$，則

$2^{t+1}+2-c<2^{t+1}+2-(2^t+1)=2^t+1<c$，

所以必須把 c 放入與$2^{t+1}+2-c$所在的數列的另一個數列裡，

（否則$c+(2^{t+1}+2-c)=2^{t+1}+2$與條件$(ii)$不符）。

這時候在與 c 同一個數列裡且小於 c 的數 e 必有

$2^t+2<c+e\le 2^t+2+2^t+1=2^{t+1}+3<2^{t+2}+2$，

且 $c+e\ne 2^{t+1}+2$，所以 $c+e$ 不可能是2^k+2型，

滿足(i)，(ii)，(iii)條件。

由數學歸納法知 c 必恰在$\langle a_n\rangle$，$\langle b_m\rangle$兩數列中的一數列裡，

此命題得證。

透過上述證明過程中(3)之③，我們可以推測 1997，1998 在那個數列中。

$1997=2^{11}+2-53$，$53=2^6+2-13$，$13=2^4+2-5$

$1998=2^{11}+2-52$，$52=2^6+2-12$，$12=2^4+2-4$

因爲 4 在$\langle a_n\rangle$裡，5 在$\langle b_m\rangle$裡，

所以 1997 在$\langle a_n\rangle$裡，1998 在$\langle b_m\rangle$裡。

《解題重點》

1.任意一正整數 c，必存在一個非零整數 t，使$2^t\le c<2^{t+1}$，如果 c 不在$\langle a_n\rangle$裡，就在$\langle b_m\rangle$裡。

2.數學歸納法（第二數學歸納法）。

《評析》

1. 本題爲組合數學的主題，以歸納構造法解題，在本次徵答題中難度最高，,得分率爲 0.72，徵答人數最少，僅有建中李國禎等 31 位。
2. 本期五個問題中，徵答本題者比率偏低，這是研究小組預料中的結果，但也有部分同學的證明分析都很完整。
3. 本題答對者中用討論方式解題的有 14 人。

評註：

1.本次徵答統計簡表如下：

	問題編號	1036	1037	1038	1039	1040
總人數　86 人	得分	560	247	294	231	157
	徵答人數	81	38	42	39	31
	得分率	0.99	0.93	1.00	0.85	0.72
一年級　63 人	得分	406	163	203	177	108
	徵答人數	59	26	29	31	24
	得分率	0.98	0.90	1.00	0.82	0.64

二年級　23 人	得分	154	84	91	54	49
	徵答人數	22	12	13	8	7
	得分率	1.00	1.00	1.00	0.96	1.00
參與徵答總校數：20 所 計：　計畫內：15 所，非計畫內：5 所						

2.本次參與徵答者高一學生較多的學校計有建中、武陵高中、彰化高中、台南一中等四所學校，其中有兩位國中生（北興國中蔡明劼國二，台師大附中陳泊寧國一）都參加 1036 題徵答，證明推理演算都很完整，值得鼓勵和培養。

3.本期首次出現沒有任何一位高三學生參與徵答，應與這些學生準備升大學有關。

4.本期徵答題數較多且徵答題品質較佳學生計有：

高一：建中蔡忠潤、楊益昇、李國禎、鄧敦民、蔡旭程、林洺弘；武陵高中黃彥穎、吳家豪、黃世昌、游志強；台中一中林宗茂；雄中盧佑群等十二位。

高二：台師大附中陳正傑、陳冠宏、林建位、王世豪；武陵高中胡台威；嘉中黃柏凱等六位。

5.學生心得感言摘錄如下：

①這次竟然有三題幾何，我真是太高興了，害我不到五天做完五題。這五題中我最喜歡 1036 題，因為我當初是想想想……叮！就做出來了，不像其它 4 題還拿筆硬拼。（建中，楊益昇）

②很少解挑戰題的我，由於學校段考剛過，因此才利用空閒時間解題。1036~1039 都不算太難；而 1040 本來思路對了，但中途亂了方向，後來被同學一點才了悟，可見思考的能力仍有待加強。（武陵高中，吳家豪）

③◆這次作法比以前大膽了許多，例如 1039 題，第二小題我也曾經想過數學歸納法的可能性，即固定三個數，但有點怕怕的，就先看看第一小題的結果，我想數學就是要勇於大膽的去嘗試。

◆1036 乍看之下很難，其實只要將其倒推就行了。

◆我沒有接受過特殊競試技巧訓練，所以表現較差一些，暑假我會多加油，希望下學期的徵答有更傑出的表現。

◆感謝您將科教月刊寄到府中，使我免除不少困擾。（道明中學，張芳銘）

④1037，1040 實在是高難度，我的其他題也都太弱，希望在科教月刊能出數學專題研究，解救眾生。（台師大附中，陳正傑）

評註：你的解題思考分析非常的周延，解題能力甚佳，可以自行閱讀相關書籍資料，足矣！