中學數學挑戰徵答題參考解答評析

通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 1031

設n為任意正整數，p為正整數。

試確定正整數 p，使 $1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$ 都是某個正整數的平方。

解答：令$S_{n,p}=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$

首先我們知道：

(1) $S_{n,1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$S_{n,2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

因此$S_{2,1}=3$，$S_{2,2}=5$，均不為完全平方數。

所以$P=1,2$不滿足所要求的條件。

(2) $S_{n,3}=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$，對任意正整數而言，$\dfrac{n(n+1)}{2}$ 必為整數，

所以$P=1,2$不滿足所要求的條件。

(3) 對任意 $p\geq 4$ 而言，$S_{2,p}=1^p+2^p=2^p+1$必為奇數。

但任一奇數 m，設 $m=2k+1$（k為整數）

$m^2=(2k+1)^2=4k(k+1)+1$，顯然

m^2不可能是 2^p+1型的數。（因為 $k(k+1)$ 必為一奇一偶，除 $k=1$ 之外，$4k(k+1)\neq 2^p$，又 $p\geq 4$ 時，$2^p\geq 16$，而 $k=1$ 時，$4k(k+1)=8$ 也不為2^p的數）。

由(1)，(2)，(3) 的討論得知：

$p=3$是唯一使 $1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$ 恆為完全平方數的正整數。

《解題重點》

1. 由簡單級數和知道 $p=1,2,3$ 的總和公式。
2. 由特例討論 $p=1,2$ 不合條件。
3. 由特例討論 $p\geq 4$ 時，1^p+2^p 不是完全平方數。

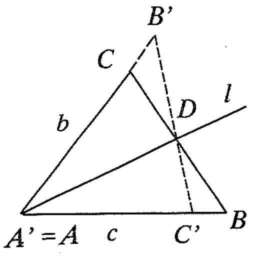
《評析》

1. 本題在本次徵答中，徵答人數最多，計有台中女中萬佳育等75位（其中有一位台北市中正國中三年級學生翁竟智亦參與徵答），得分率 0.91 亦高，符合原先之預期。
2. 大部分徵答者都直接分析 $1^p+2^p=x^2$（$x\in N$）時，只有 $p=3$ 才有可能，再進一步說明 $p=3$ 是正確的；思路正確，能掌控解題線索是突破解題的關鍵。

問題編號 1032

設$\triangle ABC$為一三角形。證明存在一直線 l，使得以直線 l 為對稱軸，$\triangle ABC$的對稱三角形$\triangle A'B'C'$與原$\triangle ABC$的內部的共同部分（即內部的交集）的區域面積大於等於$\triangle ABC$面積的$\frac{2}{3}$。

解答：證明：對任意三角形$\triangle ABC$而言，設a，b，c分別表示 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 之邊長，不妨設$a \leq b \leq c$（如圖）。取$\angle A$的平分線 l 交 $\overline{BC}$ 邊於 D，以 l 為對稱軸，設 B'，C' 分別為 B，C 的對稱點。此時 B'，C' 分別在 $\overline{AC}$與 $\overline{AB}$ 邊上(因為 l 為$\angle A$的分角線），這時候$\triangle A'B'C$為$\triangle ABC$ 的對稱三角形，因此兩三角形內部重疊的部分為四邊形$ACDC'$的內部。現在欲證此區域的面積$\geq \frac{3}{2}$（$\triangle ABC$面積）。但$\triangle ACD \cong \triangle AC'D$，



所以只要證明$\frac{\triangle ACD}{\triangle ABC} \geq \frac{1}{3}$，亦即證明$\frac{CD}{CB} \geq \frac{1}{3}$。

又$\frac{CD}{CB} = \frac{CD}{CD+DB} = \frac{1}{1+\frac{DB}{CD}} = \frac{1}{1+\frac{c}{b}}$，

由假設 $a \leq b \leq c$ 且 $a+b>c$ 可知 $2b \geq a+b>c$ 所以$\frac{c}{b}$ <2，

即可知$1+\frac{c}{b}$ <3，所以$\frac{CD}{CB}$ $>\frac{1}{3}$，此命題得證。

《解題重點》

1. 欲找出一直線作為對稱軸而且使對稱三角形與原三角形重疊部分的區域能簡化處理時，以分角線或高（垂線）最單純，其中分角線又更簡單，（因為兩頂點的對稱點分別在對邊上）。
2. 分角線分割比例性質，並取最小角的分角線。
3. 三角形不等式性質：兩邊和大於第三邊。
4. 不等式運算。

《評析》

1. 本題在本次徵答中，參與徵答人數亦多，計有武陵高中黃彥穎等41位（內含台北市中正國中三年級翁竟智一位）得分率 0.90，略低於第1031題。
2. 本題可進一步將 "$\frac{2}{3}$" 改為 "$2(\sqrt{2}-1)=0.8284\cdots$，難度更高。
3. 有部分同學利用線段三等分點之連線作對稱軸再分析討論，順利求解，幾何直觀能力很高，台師大附中王世豪、王琪仁、林建位及雄中王紹宇等都採用這樣的方式解題，但這樣解法僅止於 "恰好等於 $\frac{2}{3}$ "，若改為大於 " $\frac{2}{3}$ "，就無法得解了。

問題編號 1033 實數 x，y，z 滿足 $x^2+y^2+z^2=2$。
證明：$x+y+z-xyz\le 2$；並求出等號成立的所有數對 (x,y,z)。

解答：如果 $(x+y+z-xyz)^2\le 4$，則 $x+y+z-xyz\le 2$

⑴ $4-(x+y+z-xyz)^2=4-[(x+y+z)^2-2(x+y+z)xyz+x^2y^2z^2]$

$=4-[(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)-2(x^2yz+xy^2+xyz^2)+x^2y^2z^2]$

$=2[1-(xy+yz+zx)+(xyyz+yzzx+zxxy)-xy\cdot yz\cdot zx]+x^2y^2z^2$

$=2(1-xy)(1-yz)(1-zx)+x^2y^2z^2.\cdots\cdots\cdots(*)$

但 $1-xy=\frac{1}{2}(2-2xy)=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-2xy)=\frac{1}{2}[(x-y)^2+z^2]\ge 0$

同理 $1-yz\ge 0$，$1-zx\ge 0$

所以 $4-(x+y+z-xyz)^2\ge 0$，因此 $(x+y+z-xyz)^2\le 4$ 得證。

⑵ 欲使 $x+y+z-xyz=2$ 時，必須 x，y，z 中至少有一個為0，（由 $(*)$ 式可知）
且 x，y，z 不能全為0（否則，$(*)$ 式中 $1=(1-xy)(1-yz)(1-zx)>0$）。
當 $z=0$ 時，欲使 $1-xy=0$ 且 $x^2+y^2+z^2=2$ 則 $x=y=\pm 1$，
但欲使 $x+y+z-xyz=2$ 時，只有 $x=y=1$，$z=0$ 的解。由對稱關係可知
$x+y+z-xyz=2$ 的解為 $(1,1,0)$，$(1,0,1)$，$(0,1,1)$。

《解題重點》

1. $a\ge 0$ 時，$x^2\le a^2$ 則 $x\le a$。
2. 平方公式 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$
   $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$。
3. $(1-a)(1-b)(1-c)=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$。

《評析》

1. 本題參與徵答人數最少，僅有建中李國禎等17位，而完全答對的高一學生只有三位（建中李國禎、雄中王紹宇、林耕賢），得分率 0.74 亦低；徵答者對不等式的運算性質、恆等變形，都必須再下功夫練習。
2. 本題屬條件不等式，無常規可尋，靈活度比較高，對國內的高中數學資優生應屬難度高的問題；高師大附中學生黃朝宗利用微分法求解雖然可行，但思考處理方式亦煩，並未能精簡本題之解答。

問題編號 1034 已知：“若 $x>-1$ 且 $x\ne 0$，則對任意實數 $a>1$，$(1+x)^a>1+ax$ 恆成立”，（此不等式稱為*Bernoulli*不等式）

證明：

(1)若 $x>0$ 且 $0<y<1$，則 $x^y>\frac{x}{x+y}$。

(2)若$x_1,x_2,\cdots,x_{1998}$均爲正數，則

$$(x_2+x_3+\cdots+x_{1998})^{x_1}+(x_1+x_3+\cdots+x_{1998})^{x_2}+\cdots+$$
$$(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_{1998})^{x_i}+\cdots+$$
$$(x_1+x_2+\cdots+x_{1997})^{x_{1998}}>1997$$

解答：證明：(1)令 $a=\frac{1}{y}$ 時，$a>1$，又 $x>0$，$0<y<1$時，$\frac{y}{x}>0$，

則由*Bernoulli*不等式得

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^a>1+a\left(\frac{y}{x}\right)=1+\frac{1}{x}>\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{x+y}{x}>\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{a}}=\left(\frac{1}{x}\right)^y\Rightarrow x^y>\frac{x}{x+y}$$

(2)令$S=\sum_{i=1}^{1998}x_i$ 則 $x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_{1998}=S-x_i$

(i)如果$x_1,x_2,\cdots,x_{1998}$ 中有一數 $x_k\geq 1$，則$S-x_i\geq 1$，$k\neq i$

此命題顯然成立。

(ii)如果$x_1,x_2,\cdots,x_{1998}$都在0與1之間時，

命題(2)的左式$=\sum_{i=1}^{1998}(S-x_i)^{x_i}>\sum_{i=1}^{1998}\frac{S-x_i}{S-x_i+x_i}=\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{1998}(S-x_i)$

$$=\frac{1}{S}\left(1998S-\sum_{i=1}^{1998}x_i\right)=1997。$$

此命題得證。

《解題重點》

1. 已知的*Bernoulli*不等式。

2. 指數函數性質與指數定律。

3. 級數性質：$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$。

《評析》

1. 本題參與徵答人數計有道明中學張芳銘等54位，得分率 0.92 最高，應與配合高一基礎數學第二册指數題材，而高一學生剛完成這一題材之教學進度有關。

2. 部分徵答者在(ii)的證明中，利用(i)的結論，沒注意到指數小於1的條件，不夠完整而被扣分，誠屬可惜。

3. 第(1)部分的證明，有一些同學直接引用對數去證明，而跳過*Bernoulli*不等式的提示，這是有創意的，非常值得鼓勵！

設 $x>0$，$0<y<1\Rightarrow x^y>\frac{x}{x+y}$

（分析）$x^y>\frac{x}{x+y}>0 \Leftrightarrow y\log x-\log(x+y)$

$$\Leftrightarrow (1-y)\log x<\log(x+y)\ldots\ldots (A)$$

最後一個不等式(A)顯然是成立的，

因爲$0<1-y<1$，$0<x<x+y$ 且 $\log x$ 是遞增。

問題編號 1035

設一直線上有 n 個點標紅色，有 n 個點標藍色；證明：

所有同色點兩兩配對的距離總和不大於所有異色點兩兩配對的距離總和。

解答：解法（一）：（採自建中李國禎，台師大附中陳冠宏、王世豪、林建位、陳德鴻等之解法）

設紅色 n 個點在線上之座標爲 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，

藍色 n 個點在線上之座標爲 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，

則"同色點距離和"$=\sum\limits_{n\geq i>j\geq 1}\left\{|x_i-x_j|+|y_i-y_j|\right\}=A$

（共$2\cdot C_2^n=n^2-n$個｜｜符號）

"異色點距離和"$=\sum\limits_{n\geq i,j\geq 1}|x_i-y_j|=B$（共$n^2$個絕對值）

設$x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$，$y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_n$，則

$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=x_1-x_2+y_1-y_2$

$=(x_1-y_2)+(y_1-x_2)\leq|x_1-y_2|+|y_1-x_2|$

$\therefore\sum\limits_{n\geq i>j\geq 1}\left\{|x_i-x_j|+|y_i-y_j|\right\}\leq\sum\limits_{n\geq i>j\geq 1}\left\{|x_i-y_j|+|x_j-y_i|\right\}\cdots C$

（共n^2-n項）

$\leq\sum\limits_{n\geq i,j\geq 1}|x_i-y_j|$（共$n^2$項）。

故"同色距離和"≤"異色距離和"。

等號成立時$B-C=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|=0$

即 $x_i=y_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$。

解法（二）：（採自建中洪浩雲之解法）

數學歸納法

在數線 L 上，設 n 個紅點之坐標爲 $r_1<r_2<\cdots<r_n$，

n 個藍點之坐標爲 $b_1<b_2<\cdots<b_n$，

並且令$S_n=$同色點兩兩配對之距離和。

$F_n=$異色點兩兩配對之距離和。

(1)$n=1$時，$0=S_1\leq F_1$（成立）。

(2)設$S_n\leq F_n$，對某一自然數 n 成立，則

$S_{n+1}=S_n+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(|r_{n+1}-r_i|+|b_{n+1}-b_i|\right)$

$$=S_n+\sum_{i=1}^{n}\{(r_{n+1}-r_i)+(b_{n+1}-b_i)\}$$
$$=S_n+\sum_{i=1}^{n}\{(r_{n+1}-b_i)+(b_{n+1}-r_i)\}$$
$$\leq S_n+\sum_{i=1}^{n}\{|r_{n+1}-b_i|+|b_{n+1}-r_i|\}$$
$$\leq S_n+\sum_{i=1}^{n}\{|r_{n+1}-b_i|+|b_{n+1}-r_i|\}+|r_{n+1}-b_{n+1}|=F_{n+1}$$
$$\Rightarrow S_{n+1}\leq F_{n+1}$$

由數學歸納法得$S_n \leq F_n$，

對一切$n\in N$皆成立。

《解題重點》

1. 數線概念與對應點的排序概念。

2. $a>b$，$c>d \Rightarrow |a-b|+|c-d|=(a-b)+(c-d)$
$$=(a-d)+(c-b)\leq |a-d|+|c-b|。$$

3. 級數性質：$\sum_{k=1}^{h}(|a_k|+|b_k|)=\sum_{k=1}^{h}|a_k|+\sum_{k=1}^{h}|b_k|$。
$$\sum_{n\geq i,j\geq 1}|a_i-b_j|=\sum_{n\geq i>j\geq 1}|a_i-b_j|+\sum_{n\geq j>i\geq 1}|a_i-b_j|+\sum_{i=j=1}^{n}|a_i-b_j|。$$

4. 數學歸納法。

《評析》

1. 本題參與徵答數亦少，計有南一中劉育廷等26位，略多於第1034題；在本期五題中，得分率 0.68 為最低。

2. 本題武陵高中胡台威，雄中王紹宇及建中洪浩雲等使用歸納法證題亦屬可行之方法。

3. 本題屬組合數學（離散數學），與我國現行高中數學教材相離較遠；所需解題數學知識豐足，唯在思考推理及解題經驗上尚待積極充實訓練。

評注：

1. 本次徵答統計簡表如下：

	問題編號	1031	1032	1033	1034	1035
總人數 80人	得分	473	252	88	346	124
	徵答人數	74	40	17	54	26
	得分率	0.91	0.90	0.74	0.92	0.68
一年級 56人	得分	329	155	27	245	17
	徵答人數	53	25	7	38	17
	得分率	0.89	0.89	0.55	0.92	0.75
二年級 22人	得分	130	90	49	94	35
	徵答人數	19	14	8	15	9
	得分率	0.98	0.92	0.88	0.90	0.56

三年級 2人	得分	14	7	12	7	0
	徵答人數	2	1	2	1	0
	得分率	1.00	1.00	0.86	1.00	0.00
參與徵答總校數：15所 計： 計畫內：11所，非計畫內：4所						

2.整體而言，參與徵答的學生答題數大多至少三題以上，其中1031、1032、1034大部分答題品質理想，而1033（不等式），1035（組合數學）答得不甚理想。

3.本期出現應屆高三學生（高師大附中黃朝宗）及國三學生（中正國中翁竟智）首次參與徵答，這二位可能都已獲升學，顯見升學對正常學習活動之影響。

4.本題徵答數較多且答題品質較優異的學生計有：

高一：建中李國禎、鄧敦民、洪浩雲、蔡旭程、蔡忠潤、黃致遠、翁睿廷、陳彥宏、楊益昇、林奎佑、陳奕瑋；北一女葉書蘋；武陵高中黃彥穎；嘉中林柏志、蘇冠武；南一中劉育廷、王泓民、陳盈元、王堯生、謝書維；雄中王紹宇、林耕賢、盧佑群等二十三位。

高二：北一女黃怡碧；台師大附中林建位、陳冠宏、王世豪、陳正傑、陳德鴻、王琪仁；武陵高中胡台威、莊家勛、劉鴻傑；嘉中黃柏凱等十一位。

高三：僅有高師大附中黃朝宗一位。

5.學生心得感言摘錄如下：

①◆1034題能不用*Bernoulli*不等式證出，自己也頗感意外。

◆由1031題上半部分使自己感覺到：數字是非常有規律的。

◆多次的失敗經驗是使自己數學思考能力進步的不二法門。

（道明中學，張芳銘。）

②這次徵答，我花了不少精力下去求解，所以有些答案都給我找了出來，可惜在1031題，卻想不出解題方法，雖試了許多的不等式，可惜都無功而返，有些令人失望。（建中，洪浩雲。）

③第1033題若改成證明

"$\sqrt{2}\cos A\sin(45^\circ+B)+\sin A(1-\cos^2 A\sin 2B)\leq\sqrt{2}$ "我想會更難。

（建中，李國禎。）

④我是第一次看到徵答題目覺得滿感興趣的，便著手算了一下，但我不知要如何參加，所以冒昧地將我的答案寄到你們所附的地址，希望不會造成你們的

（下接第16頁）