三線性坐標與面積坐標（三）

趙文敏
國立臺灣師範大學數學系

下面的例11中的性質，是*Klamkin*與*Liu* [5] 所提出的，它可說是*Menelaus*定理與*Ceva*定理的一個推廣。

例11：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，點B_1與C_1在直線A_2A_3上、點B_2與C_2在直線A_3A_1上、點B_3與C_3在直線A_1A_2上，而且點B_1、B_2與B_3都不是$\triangle A_1A_2A_3$的頂點。若$[A_2A_3/B_1]=r_1$、$[A_3A_1/B_2]=r_2$、$[A_1A_2/B_3]=r_3$、$[A_2A_3/C_1]=s_1$、$[A_3A_1/C_2]=s_2$且$[A_1A_2/C_3]=s_3$，則直線C_1B_2、C_2B_3與C_3B_1共點的充要條件是三直線中至少有兩直線相交而且$r_1r_2r_3s_1s_2s_3+r_2r_3s_1+r_3r_1s_2+r_1r_2s_3-r_1r_2r_3+1=0$（參看圖9）。

證：設直線C_1B_2與C_2B_3相交於一點P。因爲點B_1、B_2、B_3、C_1、C_2與C_3對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$B_1(0:1:r_1)$、$B_2(r_2:0:1)$、$B_3(1:r_3:0)$、$C_1(0:1:s_1)$、$C_2(s_2:0:1)$與$C_3(1:s_3:0)$。設點P對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$P(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則依定理6⑴，可得

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 1 & s_1 \\ r_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0，\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ s_2 & 0 & 1 \\ 1 & r_3 & 0 \end{vmatrix}=0。$$

亦即：$\mu_1+r_2s_1\mu_2-r_2\mu_3=0,\ -r_3\mu_1+\mu_2+r_3s_2\mu_3=0$。由此解得

$$\mu_1:\mu_2:\mu_3=(r_2r_3s_1s_2+r_2):(r_2r_3-r_3s_2):(1+r_2r_3s_1)。$$

換言之，點P對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$P(r_2r_3s_1s_2+r_2:r_2r_3-r_3s_2:1+r_2r_3s_1)$。於是，得

直線C_1B_2、C_2B_3、C_3B_1共點

$\Leftrightarrow C_3$、B_1、P共線

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} r_2r_3s_1s_2+r_2 & r_2r_3-r_3s_2 & 1+r_2r_3s_1 \\ 1 & s_3 & 0 \\ 0 & 1 & r_1 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow r_1r_2r_3s_1s_2s_3+r_2r_3s_1+r_3r_1s_2+r_1r_2s_3-r_1r_2r_3+1=0$。 ‖

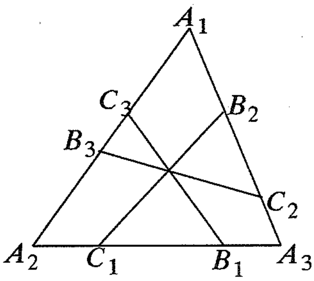

圖9

在例11中，若$C_1=A_2$、$C_2=A_3$、$C_3=A_1$，則$s_1=s_2=s_3=0$。於是，例11中的充要條件是$r_1r_2r_3=1$，這就是*Ceva*定理。另一方面，若$C_1=B_1$、$C_2=B_2$、$C_3=B_3$，則$r_1=s_1$、$r_2=s_2$、$r_3=s_3$。於是，例11中的充要條件是$(r_1r_2r_3+1)^2=0$或$r_1r_2r_3=-1$，這就是*Menelaus*定理。

下面例12中的性質，是*Guelicher* [3] 提出來的。

例12：設$\triangle A_1A_2A_3$為任意三角形，而點B_1、B_2與B_3分別在直線A_2A_3、A_3A_1與A_1A_2上，但都不是$\triangle A_1A_2A_3$的頂點。若$[A_2A_3/B_1]=r_1$、$[A_3A_1/B_2]=r_2$且$[A_1A_2/B_3]=r_3$，過B_1、B_2、B_3各作一直線分別與$\overline{A_3A_1}$、$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$平行，則此三直線共點的充要條件是$r_1r_2r_3-(r_1+r_2+r_3)=2$。

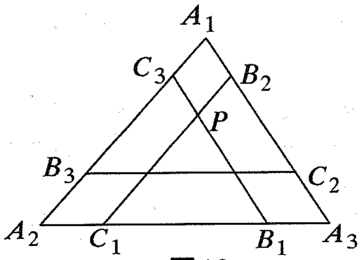

圖10

證：設過點B_1、B_2、B_3的直線分別與直線A_1A_2、A_2A_3、A_3A_1交於點C_3、C_1、C_2，則$\overrightarrow{A_2C_1}=(1/r_2)\overrightarrow{C_1A_3}$、$\overrightarrow{A_3C_2}=(1/r_3)\overrightarrow{C_2A_1}$、$\overrightarrow{A_1C_3}=(1/r_1)\overrightarrow{C_3A_2}$。於是，點$B_1$、$B_2$、$B_3$、$C_1$、$C_2$與$C_3$對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別為$B_1(0:1:r_1)$、$B_2(r_2:0:1)$、$B_3(1:r_3:0)$、$C_1(0:r_2:1)$、$C_2(1:0:r_3)$與$C_3(r_1:1:0)$。設直線$B_1C_3$與$B_2C_1$交於一點$P$，仿例5的方法，可知點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標為$P(r_1r_2-1:1+r_2:1+r_1)$。於是，得

直線B_1C_3、B_2C_1、B_3C_2共點

$\Leftrightarrow$點B_3、C_2、P共線

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} r_1r_2-1 & 1+r_2 & 1+r_1 \\ 1 & r_3 & 0 \\ 1 & 0 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow r_1r_2r_3-(r_1+r_2+r_3)=2$。‖

下面的例13中的性質，是*Goggins* [2] 所提出的。

例13：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，點O_1、O_2、O_3分別是$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$、$\overline{A_1A_2}$的中點。若點B_1、B_2、B_3是$\triangle A_1A_2A_3$邊上的點，其定義如下：對每個$i=1,2,3$，由點O_i沿著$\triangle A_1A_2A_3$的邊至點B_i的距離等於$\triangle A_1A_2A_3$周長的一半，則直線O_1B_1、O_2B_2與O_3B_3共點（參看圖11）。

證：設$\triangle A_1A_2A_3$的三邊長a_1、a_2與a_3滿足$a_1\geq a_2\geq a_3$，則點B_1在$\overline{A_3A_1}$上且$\overline{A_3B_1}=(a_2+a_3)/2$、$\overline{B_1A_1}=(a_2-a_3)/2$；點$B_2$在$\overline{A_2A_3}$上且$\overline{A_2B_2}=(a_1-a_3)/2$、$\overline{B_2A_3}=(a_1+a_3)/2$；點$B_3$在$\overline{A_2A_3}$上且$\overline{A_2B_3}=(a_1+a_2)/2$、$\overline{B_3A_3}=(a_1-a_2)/2$。於是，點$B_1$、$B_2$、$B_3$對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$B_1(a_2+a_3:0:a_2-a_3)$、$B_2(0:a_1+a_3:a_1-a_3)$、$B_3(0:a_1-a_2:a_1+a_2)$。設直線$O_1B_1$與$O_2B_2$交於一點$P$，則仿例5的方法，可得點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$P(a_2+a_3:a_3+a_1:a_1+a_2)$。因爲

$$\begin{vmatrix} a_2+a_3 & a_3+a_1 & a_1+a_2 \\ 0 & a_1-a_2 & a_1+a_2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

所以，點P、B_3與O_3共線。於是，直線O_1B_1、O_2B_2與O_3B_3共點。‖

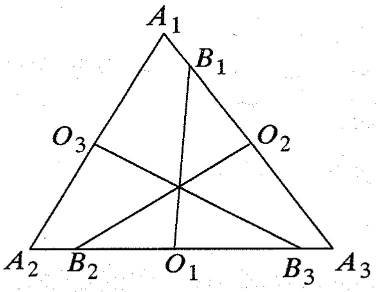

圖11

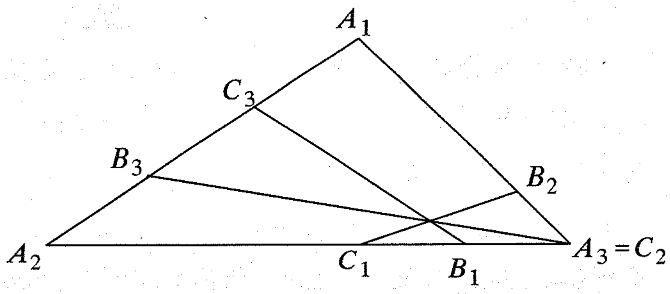

圖12

例14：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，將$\overline{A_2A_3}$五等分、$\overline{A_3A_1}$四等分、$\overline{A_1A_2}$三等分，選取一些等分點如下：點B_1、C_1在$\overline{A_2A_3}$上且$[A_2A_3/C_1]=3/2$、$[A_2A_3/B_1]=4$；點B_2、C_2在$\overline{A_3A_1}$上且$C_2=A_3$、$[A_3A_1/B_2]=1/3$；點B_3、C_3在$\overline{A_1A_2}$上且$[A_1A_2/C_3]=1/2$、$[A_1A_2/B_3]=2$。試證：直線C_1B_2、C_2B_3與C_3B_1共點（參看圖12）。

證：由例11的充要條件立即可得，或仿照例12、例13等直接證明亦可。‖

例14中的性質乃是荷蘭籍的畫家*M.C. Escher*所發現的。除了上例中選用的等分點之外，利用其他的等分點也可得出類似的共點例子，留給有興趣的讀者自行探討。

丙、三線性坐標系與面積坐標系中的直線

根據定理6中三點共線的條件，很容易導出直線的方程式。

定理7（直線的齊次方程式）

設點P、Q是與$\triangle A_1A_2A_3$共平面的二相異點。

(1)若點P與Q對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$P(p_1:p_2:p_3)$與$Q(q_1:q_2:q_3)$，則直線PQ上每個點X對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標$X(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$必滿足

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}=0\text{，或}$$

$$(p_2q_3-p_3q_2)\mu_1+(p_3q_1-p_1q_3)\mu_2+(p_1q_2-p_2q_1)\mu_3=0\text{。}$$

上述等式稱爲直線PQ對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式。

(2)若點P與Q對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標分別爲$P(p_1:p_2:p_3)$與$Q(q_1:q_2:q_3)$，則直線PQ上每個點X對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標$X(v_1:v_2:v_3)$必滿足

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}=0\text{，或}$$

$$(p_2q_3-p_3q_2)v_1+(p_3q_1-p_1q_3)v_2+(p_1q_2-p_2q_1)v_3=0\text{。}$$

證：依定理6立即可得。‖

例15：參考三角形$\triangle A_1A_2A_3$的一些特殊相關直線對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標方程式如下：

⑴含三邊的直線：$A_2A_3: v_1=0,\ A_3A_1: v_2=0,\ A_1A_2: v_3=0$。

⑵含三中線的直線：$A_1O_1: a_2v_2-a_3v_3=0,\ A_2O_2: a_1v_1-a_3v_3=0,\ A_3O_3: a_1v_1-a_2v_2=0$。

⑶含三內角分角線的直線：$A_1I: v_2-v_3=0, A_2I: v_3-v_1=0, A_3I: v_1-v_2=0$。

⑷含三外角分角線的直線：$J^2J^3: v_2+v_3=0, J^3J^1: v_1+v_3=0, J^1J^2: v_1+v_2=0$。

⑸含三高的直線：

$A_1H_1: (\cos\alpha_2)v_2-(\cos\alpha_3)v_3=0,\ A_2H_2: (\cos\alpha_1)v_1-(\cos\alpha_3)v_3=0,$

$A_3H_3: (\cos\alpha_1)v_1-(\cos\alpha_2)v_2=0$。

例16：參考三角形$\triangle A_1A_2A_3$的一些特殊相關直線對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式如下：

⑴含三邊的直線：$A_2A_3: \mu_1=0, A_3A_1: \mu_2=0, A_1A_2: \mu_3=0$。

⑵含三中線的直線：$A_1O_1: \mu_2-\mu_3=0, A_2O_2: \mu_3-\mu_1=0, A_3O_3: \mu_1-\mu_2=0$。

⑶含三內角分角線的直線：

$A_1I: a_3\mu_2-a_2\mu_3=0, A_2I: a_3\mu_1-a_1\mu_3=0, A_3I: a_2\mu_1-a_1\mu_2=0$。

⑷含三外角分角線的直線：

$J^2J^3: a_3\mu_2+a_2\mu_3=0, J^3J^1: a_3\mu_1+a_1\mu_3=0, J^1J^2: a_2\mu_1+a_1\mu_2=0$。

⑸含三高的直線：

$A_1H_1: (\cot\alpha_2)\mu_2-(\cot\alpha_3)\mu_3=0, A_2H_2: (\cot\alpha_1)\mu_1-(\cot\alpha_3)\mu_3=0,$

$A_3H_3: (\cot\alpha_1)\mu_1-(\cot\alpha_2)\mu_2=0$。

定理8（直線的齊次方程式之二）

設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，L爲其平面上的一直線。若頂點A_1、A_2與A_3至L的有向距離分別爲d_1、d_2與d_3，（此處所謂有向距離，乃是指：在L同側的兩點至L的距離同號；在L異側的兩點至L的距離異號。）則

⑴直線L上每個點X對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標$X(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$都滿足

$$d_1\mu_1+d_2\mu_2+d_3\mu_3=0。$$

⑵直線L上每個點X對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標$X(v_1:v_2:v_3)$都滿足

$$a_1d_1v_1+a_2d_2v_2+a_3d_3v_3=0。$$

證：⑴在$\triangle A_1A_2A_3$的平面上選取一個直角坐標系，使得直線L爲x軸，而且適當地

選取坐標軸的方向，可使點A_1、A_2與A_3的y坐標分別是它們至直線L的有向距離d_1、d_3與d_3。設X是直線L上任意點，且X對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$X(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，依定理3，點X對上述直角坐標系的y坐標等於

$$\frac{\mu_1 d_1+\mu_2 d_2+\mu_3 d_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\quad。$$

因爲直線L是直角坐標系的X軸，所以，點X的y坐標等於0。由此即得

$$d_1\mu_1+d_2\mu_2+d_3\mu_3=0。$$

⑵由前面的⑴及定理1⑴立即可得。‖

利用定理8的直線方程式，可以得出兩直線平行的條件。

定理9（兩直線平行的條件）

設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，其三邊長分別爲a_1、a_2與a_3。

⑴在以$\triangle A_1A_2A_3$爲參考三角形的面積坐標系中，兩直線

$$L_1:h_1\mu_1+h_2\mu_2+h_3\mu_3=0\text{與}L_2:k_1\mu_1+k_2\mu_2+k_3\mu_3=0$$

平行的充要條件是：$h_2k_3-h_3k_2$、$h_3k_1-h_1k_3$與$h_1k_2-h_2k_1$三數中至少有一不等於0（亦即：兩直線相異），而且

$$(h_2k_3-h_3k_2)+(h_3k_1-h_1k_3)+(h_1k_2-h_2k_1)=0。$$

⑵在以$\triangle A_1A_2A_3$爲參考三角形的三線性坐標系中，兩直線

$$L_1:h_1\nu_1+h_2\nu_2+h_3\nu_3=0\text{與}L_2:k_1\nu_1+k_2\nu_2+k_3\nu_3=0$$

平行的充要條件是：$h_2k_3-h_3k_2$、$h_3k_1-h_1k_3$與$h_1k_2-h_2k_1$三數中至少有一不等於0（亦即：兩直線相異），而且

$$a_1(h_2k_3-h_3k_2)+a_2(h_3k_1-h_1k_3)+a_3(h_1k_2-h_2k_1)=0。$$

證：⑴必要性：設直線L_1與L_2平行。令d_1、d_2與d_3分別表示頂點A_1、A_2與A_3至直線L_1的有向距離。因爲$L_1 /\!/ L_2$，所以，必可找到一個不等於0的實數d，使得：頂點A_1、A_2與A_3至直線L_2的有向距離分別爲d_1+d、d_2+d與d_3+d。依定理8，直線

L_1與L_2對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式分別爲

$$L_1:\ d_1\mu_1+d_2\mu_2+d_3\mu_3=0,$$
$$L_2:\ (d_1+d)\mu_1+(d_2+d)\mu_2+(d_3+d)\mu_3=0。$$

因爲依假設，直線L_1與L_2對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式分別爲

$$L_1:\ h_1\mu_1+h_2\mu_2+h_3\mu_3=0,$$
$$L_2:\ k_1\mu_1+k_2\mu_2+k_3\mu_3=0,$$

所以，必可找到兩個不等於零的數r與s，使得

$$h_1=rd_1,\qquad h_2=rd_2,\qquad h_3=rd_3;$$
$$k_1=s(d_1+d),\quad k_2=s(d_2+d),\quad k_3=s(d_3+d)。$$
$$h_2k_3-h_3k_2=rsd(d_2-d_3),\ h_3k_1-h_1k_3=rsd(d_3-d_1),\ h_1k_2-h_2k_1=rsd(d_1-d_2)。$$

於是，得$(h_2k_3-h_3k_2)+(h_3k_1-h_1k_3)+(h_1k_2-h_2k_1)=0$，而且因爲$d_1$、$d_2$與$d_3$至少有兩數不相等，又$rsd\neq 0$，所以，此三數至少有一不等於0。

充分性：設定理的條件成立。設直線L_1與L_2有一交點$P(p_1:p_2:p_3)$，則得$h_1p_1+h_2p_2+h_3p_3=0$ 且$k_1p_1+k_2p_2+k_3p_3=0$。因爲$h_2k_3-h_3k_2$、$h_3k_1-h_1k_3$與$h_1k_2-h_2k_1$三數中至少有一不等於0，所以聯立求解，得

$$p_1:p_2:p_3=(h_2k_3-h_3k_2):(h_3k_1-h_1k_3):(h_1k_2-h_2k_1)。$$

依假設，得$p_1+p_2+p_3=0$，此與定理2(1)的結果矛盾。因此，直線L_1與L_2平行。

(2)由前面的(1)及定理1(1)立即可得。‖

例17：根據定理9(1)的證明，當兩直線L_1與L_2平行時，若L_1對$\triangle A_1A_2A_3$的一個面積坐標方程式爲$h_1\mu_1+h_2\mu_2+h_3\mu_3=0$，則$L_2$對$\triangle A_1A_2A_3$的一個面積坐標方程式可表示成$(h_1\mu_1+h_2\mu_2+h_3\mu_3)+k(\mu_1+\mu_2+\mu_3)=0$，其中的$k$是某適當的常數。例如：設點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$P(p_1:p_2:p_3)$，因爲含高$\overline{A_1H_1}$的直線對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式爲$(\cot\alpha_2)\mu_2-(\cot\alpha_3)\mu_3=0$，而點$P$至直線$A_2A_3$的垂直線與該直線平行或重合，所以，此垂直線對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式爲下述形式：

$$(\cot\alpha_2)\mu_2-(\cot\alpha_3)\mu_3+k(\mu_1+\mu_2+\mu_3)=0。$$

因爲點$P(p_1:p_2:p_3)$在此直線上，所以，得

$k=-((\cot\alpha_2)p_2-(\cot\alpha_3)p_3)/(p_1+p_2+p_3)$ 。亦即：過點$P(p_1:p_2:p_3)$而與直線A_2A_3垂直的直線的面積坐標方程式爲

$$(\cot\alpha_2)\mu_2-(\cot\alpha_3)\mu_3-\frac{(\cot\alpha_2)p_2-(\cot\alpha_3)p_3}{p_1+p_2+p_3}\cdot(\mu_1+\mu_2+\mu_3)=0。\|$$

定理10（兩直線的交點坐標）

設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，而L_1與L_2爲$\triangle A_1A_2A_3$平面上的二相異直線。

⑴若L_1與L_2不平行，而它們對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式分別爲

$$L_1:\ h_1\mu_1+h_2\mu_2+h_3\mu_3=0,\ L_2:\ k_1\mu_1+k_2\mu_2+k_3\mu_3=0,$$

則L_1與L_2的交點對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$(h_2k_3-h_3k_2:h_3k_1-h_1k_3:h_1k_2-h_2k_1)$。

⑵若L_1與L_2不平行，而它們對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標方程式分別爲

$$L_1:\ h_1v_1+h_2v_2+h_3v_3=0,\ L_2:\ k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0,$$

則L_1與L_2的交點對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標爲$(h_2k_3-h_3k_2:h_3k_1-h_1k_3:h_1k_2-h_2k_1)$。

證：將方程式聯立求解即得。‖

定理11（三直線共點的條件）

設L_1、L_2與L_3是與$\triangle A_1A_2A_3$在同一平面上的相異直線。

⑴若直線L_1、L_2與L_3對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式分別爲$L_1:h_1\mu_1+h_2\mu_2+h_3\mu_3=0$、$L_2:k_1\mu_2+k_2\mu_2+k_3\mu_3=0$與$L_3:l_1\mu_1+l_2\mu_2+l_3\mu_3=0$，則$L_1$、$L_2$與$L_3$共點或兩兩平行的充要條件是

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}=0。$$

⑵若直線L_1、L_2與L_3對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標方程式分別爲$L_1:h_1v_1+h_2v_2+h_3v_3=0$、$L_2:k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$與$L_3:l_1v_1+l_2v_2+l_3v_3=0$，則$L_1$、$L_2$與$L_3$共點或兩兩平行的充要條件是

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0 \text{。}$$

解：由定理10立即可得。‖

前面例4、例5、例7、例8、例11、例12、例13與例14的共點實例，都可以利用定理11 來證明，留給讀者自己討論。

例18（*Nagel*的中央點（*middlespoint*或德文的*Mittenpunkt*））

設$\triangle A_1A_2A_3$為任意三角形。若點O_1、O_2與O_3分別為$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$與$\overline{A_1A_2}$的中點，而點J^1、J^2、J^3分別表示$\triangle A_1A_2A_3$與頂點A_1、A_2、A_3異側的傍切圓圓心，則直線O_1J^1、O_2J^2與O_3J^3共點（參看圖13）。此點是*C.H.von Nagel*在1836年的一篇論文中所提出，*Nagel*稱它為$\triangle A_1A_2A_3$的*Mittenpunkt*，它位於$\triangle A_1A_2A_3$的內部。

證：依例2，點O_1、O_2與O_3對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別為$O_1(0:1:1)$、$O_2(1:0:1)$與$O_3(1:1:0)$，點J^1、J^2與J^3對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別為$J^1(-a_1:a_2:a_3)$、$J_2(a_1:-a_2:a_3)$ 與$J_3(a_1:a_2:-a_3)$。依定理6(1)，直線O_1J^1、O_2J^2與O_3J^3對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式分別為

$$\begin{aligned} O_1J^1 &: (a_3-a_2)\mu_1 - a_1\mu_2 + a_1\mu_3 = 0, \\ O_2J^2 &: a_2\mu_1 + (a_1-a_3)\mu_2 - a_2\mu_3 = 0, \\ O_3J^3 &: -a_3\mu_1 + a_3\mu_2 + (a_2-a_1)\mu_3 = 0 \text{。} \end{aligned}$$

將上述三方程式的係數行列式的後兩列加到第一列，即得

$$\begin{vmatrix} a_3-a_2 & -a_1 & a_1 \\ a_2 & a_1-a_3 & -a_2 \\ -a_3 & a_3 & a_2-a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1-a_3 & -a_2 \\ -a_3 & a_3 & a_2-a_1 \end{vmatrix} = 0 \text{。}$$

另一方面，解前兩方程式，即得解的比值等於

$$\begin{aligned} & a_1(-a_1+a_2+a_3) : a_2(a_1-a_2+a_3) : a_3(a_1+a_2-a_3) \\ = & a_1(s-a_1) : a_2(s-a_2) : a_3(s-a_3) \text{。} \end{aligned}$$

因為$a_1(s-a_1)+a_2(s-a_2)+a_3(s-a_3) \neq 0$，所以，直線$O_1J^1$、$O_2J^2$、$O_3J^3$共點，其所共之點為$M(a_1(s-a_1):a_2(s-a_2):a_3(s-a_3))$。‖

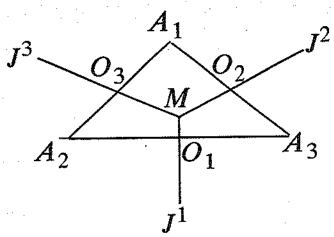

圖13

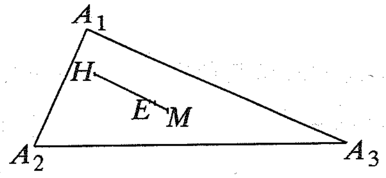

圖14

例19：三角形$\triangle A_1A_2A_3$的垂心H、中央點M與中點三角形$\triangle O_1O_2O_3$的內心共線（參看圖14）。

證：若$\triangle A_1A_2A_3$是正三角形，則此三點必重合。下面設$\triangle A_1A_2A_3$不是正三角形。我們先求中點三角形$\triangle O_1O_2O_3$的內心E對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標。因爲$\triangle O_1O_2O_3$與$\triangle A_1A_2A_3$相似且$\overline{A_2A_3}=2\overline{O_2O_3}$，所以，點$E$至$\overline{O_2O_3}$的距離等於$\triangle A_1A_2A_3$的內心$I$至$\overline{A_2A_3}$的距離的二分之一，此值就是$\triangle A_1A_2A_3$的內切圓半徑$\triangle/s$的二分之一。於是，可得

點E至$\overline{A_2A_3}$的距離

$$
\begin{aligned}
&=(\text{高}\overline{A_1H_1}\text{的二分之一})-(\text{點}E\text{至}\overline{O_2O_3}\text{的距離})\\
&=\frac{\triangle}{a_1}-\frac{\triangle}{2s}\\
&=\frac{\triangle}{2s}\cdot\frac{2s-a_1}{a_1}\\
&=\frac{\triangle}{2s}\cdot\frac{a_2+a_3}{a_1}\text{。}
\end{aligned}
$$

由此可知：$\triangle EA_2A_3$的有向面積爲$\triangle(a_2+a_3)/(4s)$。同理可知：$\triangle EA_3A_1$與$\triangle EA_1A_2$的有向面積分別爲$\triangle(a_3+a_1)/(4s)$與$\triangle(a_1+a_2)/(4s)$。因此，點E對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$E(a_2+a_3:a_3+a_1:a_1+a_2)$。

考慮由$M(a_1(s-a_1):a_2(s-a_2):a_3(s-a_3))$及$E(a_2+a_3:a_3+a_1:a_1+a_2)$所連直線$ME$對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式：因爲

$$
\begin{aligned}
&a_2(s-a_2)(a_1+a_2)-a_3(s-a_3)(a_3+a_1)\\
&=\frac{1}{2}a_2(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2)-\frac{1}{2}a_3(a_1+a_2-a_3)(a_3+a_1)\\
&=\frac{1}{2}(a_2-a_3)(a_1^2-a_2^2-a_3^2)\text{，}
\end{aligned}
$$

所以，直線ME對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式爲

$(a_2-a_3)(a_1^2-a_2^2-a_3^2)\mu_1+(a_3-a_1)(a_2^2-a_3^2-a_1^2)\mu_2+(a_1-a_2)(a_3^2-a_1^2-a_2^2)\mu_3$
$=0$。

若$\triangle A_1A_2A_3$爲直角三角形，設$\alpha_3=\pi/2$，則垂心H對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$H(0:0:1)$。因爲$a_3^2=a_1^2+a_2^2$，所以，H對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標滿足上述方程式。若$\triangle A_1A_2A_3$不是直角三角形，則H對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$H(\tan\alpha_1:\tan\alpha_2:\tan\alpha_3)$。依正弦定律與餘弦定律，得

$$\tan\alpha_1=\frac{R^{-1}a_1a_2a_3}{a_2^2+a_3^2-a_1^2}\text{。}$$

其中，R是$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓半徑，$\tan\alpha_2$與$\tan\alpha_3$也有類似的表示法。利用這些表示式，容易得知H的面積坐標滿足上述方程式。‖

$\triangle A_1A_2A_3$的中點三角形$\triangle O_1O_2O_3$的內切圓稱爲$\triangle A_1A_2A_3$的*Spieker*圓，而其圓心E稱爲$\triangle A_1A_2A_3$的*Spieker*中心。例13中三直線的交點也就是*Spieker*中心。

例20（*Gergonne*線）

設$\triangle A_1A_2A_3$是一個不等邊三角形。若$\triangle A_1A_2A_3$的內切圓與三邊$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$與$\overline{A_1A_2}$分別切於點I_1、I_2與I_3，則直線I_2I_3與A_2A_3的交點I_1'、直線I_3I_1與A_3A_1的交點I_2'、直線I_1I_2與A_1A_2的交點I_3'等三點共線，此直線稱$\triangle A_1A_2A_3$的*Gergonne*線（參看圖15）。

證：點I_1、I_2與I_3對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$I_1(0:s-a_3:s-a_2)$、$I_2(s-a_3:0:s-a_1)$ 與$I_3(s-a_2:s-a_1:0)$。依定理7，直線I_2I_3對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式爲

$$-(s-a_1)\mu_1+(s-a_2)\mu_2+(s-a_3)\mu_3=0\text{。}$$

於是，直線I_2I_3與A_2A_3的交點I_1'對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$I_1'(0:s-a_3:-(s-a_2))$。同理，I_2'與I_3'對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$I_2'(-(s-a_3):0:s-a_1)$與$I_3(s-a_2:-(s-a_1):0)$。因爲

$$\begin{vmatrix} 0 & s-a_3 & -(s-a_2) \\ -(s-a_3) & 0 & s-a_1 \\ s-a_2 & -(s-a_1) & 0 \end{vmatrix}=0\text{，}$$

所以，依定理6，點I_1'、I_2'與I_3'共線。包含此三點的直線對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式爲$(s-a_1)\mu_1+(s-a_2)\mu_2+(s-a_3)\mu_3=0$。‖

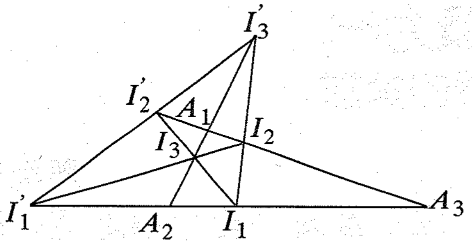

圖15

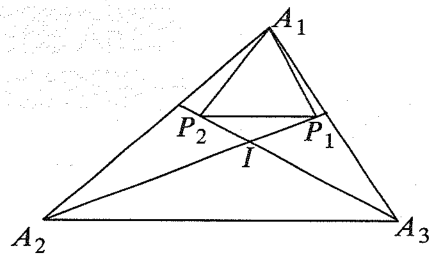

圖16

例21：試證：自三角形$\triangle A_1A_2A_3$的一個頂點A_1向另外二內角的分角線作垂直線，則兩垂足的連線必與直線A_2A_3平行。

證：設點A_1至分角線A_2I的垂足爲P_1，而且P_1對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$P_1(p_1:p_2:p_3)$。因爲分角線A_2I對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式爲$a_3\mu_1-a_1\mu_3=0$，所以，$p_1:p_3=a_1:a_3$。其次，利用$\overline{A_1P_1}$及$\angle A_2A_1P_1$、$\angle A_3A_1P_1$可求得$p_2:p_3=a_2\cos(\alpha_2/2+\alpha_3):a_3\cos(\alpha_2/2)$。因此，點$P_1$對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$P_1(a_1\cos(\alpha_2/2):a_2\cos(\alpha_2/2+\alpha_3):a_3\cos(\alpha_2/2))$。同理，設$A_1$至分角線$A_3I$的垂足爲$P_2$，則$P_2$對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$P_2(a_1\cos(\alpha_3/2):a_2\cos(\alpha_3/2):a_3\cos(\alpha_2+(\alpha_3/2)))$。依定理7，直線$P_1P_2$對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式爲

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_1 & \mu_3 \\ a_1\cos\frac{\alpha_2}{2} & a_2\cos\left(\frac{\alpha_2}{2}+\alpha_3\right) & a_3\cos\frac{\alpha_2}{2} \\ a_1\cos\frac{\alpha_3}{2} & a_2\cos\frac{\alpha_3}{2} & a_3\cos\left(\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}\right) \end{vmatrix}=0。$$

利用積化和差及和差化積公式，可得

$$\cos\left(\frac{\alpha_2}{2}+\alpha_3\right)\cos\left(\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}\right)-\cos\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_3}{2}=-\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\sin\alpha_1,$$
$$\cos\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_3}{2}-\cos\frac{\alpha_2}{2}\cos\left(\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}\right)=\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\sin\alpha_2,$$
$$\cos\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_3}{2}-\cos\frac{\alpha_3}{2}\cos\left(\frac{\alpha_2}{2}+\alpha_2\right)=\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\sin\alpha_3。$$

於是，直線P_1P_2對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標方程式爲

$$(-a_2a_3\sin\alpha_1)\mu_1+(a_3a_1\sin\alpha_2)\mu_2+(a_1a_2\sin\alpha_3)\mu_3=0。$$

依正弦定律，此方程式可改寫成$\mu_1-\mu_2-\mu_3$，或寫成

$$2\mu_1-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)=0。$$

依定理9(1)，直線$P_1P_2:\mu_1-\mu_2-\mu_3=0$與$A_2A_3:\mu_1=0$平行。‖ ★