# 樹狀圖的魔力(一)
## ～ 一則移位遊戲的探討 ～

鄭再添
國立臺灣師範大學附屬中學

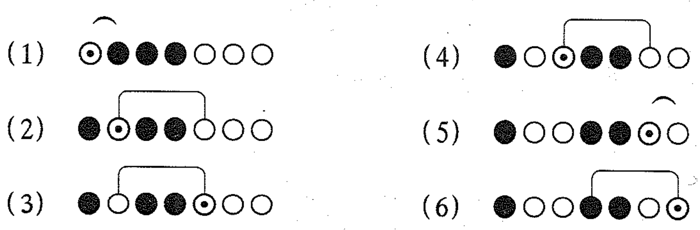
## 一、緒　　論

由於個人志趣與職業的影響，筆者閒時在家，常喜歡和孩子們以親子數學的方式一齊進行問題探索．有一次，我們討論到一則有趣的移位遊戲，它出自王芳夫、王登傳合著的“數學遊戲大觀”（參見〔3〕），原問題如下所述：

> 有6頂帽子,其中3頂是紅帽子,其餘3頂是白帽子,放在掛鉤上如下圖所示．現在要將白色帽子移動至1、2、3位置上,紅色帽子移動至4、5、6位置上；但移動時必須遵守下列規則：
> (1) 能夠移動帽子的地方只有這7個掛鉤。
> (2) 移動時向左或右均可，但最多僅能越過兩頂帽子,不可超越三頂以上
> (3) 移動的次數限定十次。

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| · | ● | ● | ● | ○ | ○ | ○ | 圖一 |
| ○ | ○ | ○ | ● | ● | ● | · | 圖二 |

與它類似的問題並不少見；一般以寓教於樂方式探討數學遊戲的書籍，多多少少總會收錄到（參見〔13〕）。然而，這類的書通常只附簡答，少有對問題進行探索、詳加解析者．以上題爲例，編者提供的答案如下：



(7) ●○○⊙●○●　　　(9) ○○⊙●●○●

(8) ⊙○○●●○●　　　(10) ○○○●●⊙●

○○○●●●完成圖

我們無法滿足於這樣的解答；由題目的遊戲規則裡，我們很自然地聯想到下列幾個問題：

爲什麼要限定十次？是否有少於十次的方法？　又：

十次的方法是否只有一種？如果不是，到底有幾種不同的方法？．．．．

扼要而言－

1. 最少次數到底是幾次？會有幾種方法？
2. 是否可以自行更改遊戲的規則或目標（即移動的最後結果）而仍能保持遊戲的趣味性？甚至增加它的趣味性？

正是這些疑點引發筆者對此問題進行深入探究的動機。

在研究方法上，筆者經由實際動手試驗的過程中，我們領悟出『避免重複』的最高指導原則；再以數字代表帽子，利用這原則來建構樹狀圖，從而獲得這個遊戲的最少次數，及所有的可能下法（不作無意義的重複）；同時可以由樹狀圖立即知道任意遊戲目標的最少次數，並能對不同的遊戲目標間的趣味性作比較！

爲了節省畫圖的時間和空間，我們再從觀察解析樹狀圖的過程中，領悟出“大步向前－保持暢通”的新原則，能有效地簡化建構樹狀圖的過程，對更改遊戲規則後的問題探討有很大幫助。本文把這些心得整理出來供大家參考，敬請多多指教。

## 二、文獻探討

(一)在“數學遊戲大觀”中，編者把移位遊戲歸類在排列問題裡。茲列舉此書中數則類似的問題以供參考：

〈1〉6個小球，其中3個紅球，3個白球，排成一列如圖一所示，請你每次拿相鄰的2個移動，限三次使成爲圖二的形狀。（〔3〕，p 124）

○●○●○●　　　●●●○○○

圖一　　　　　圖二

〈2〉下圖有7個空格，內放有1至6個阿拉伯數字，只有最右一格是空的，現在利用

這個空格，請將阿拉伯數字1,2,3,4,5,6重新排列成為6,5,4,3,2,1。在重新排列的過程中，任何一數都可前後移動，或者是跳一格移動，請問最少要移動幾次才能重新排成呢？（〔3〕，p 125）

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |

圖一

↓

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

圖二

〈3〉有圍棋黑子和白子各三個，排成如下圖一這個樣子。你能移動黑子和白子，使圖形調個頭，變成圖二那樣子？移動的規則是：

⑴白子只能向左移，黑子只能向右移。

⑵每次只能把一顆棋子移一格到旁邊的空位上。例如把格子5的白子移到格子4

⑶亦可以跳過一顆子（不管顏色如何）而至空位上。譬如格子2的黑子移到格子4上。（〔3〕，p 153）

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ● | ● | ● | | ○ | ○ | ○ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

圖一

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ | | ● | ● | ● |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

圖二

從這些題型大概可以看出，各種大同小異的移位遊戲裡，隨著題意之：⑴遊戲的開始及結束狀態；⑵棋子的移動規則－而產生難易不一的問題情境。就前者來論，可先概分成有格位限制及無格位限制（如 < 1 >例所示）兩大類；其中有限制格位者，再就空位所在來看，則以居中及位於邊側為主要區別。由於移位遊戲的操作過程通常都是可逆的，因此對始末狀態恰為互調的兩則遊戲來說，只是將過程逆向操作罷了。。至於棋子的移動規則方面，則依：移動方向限制、單獨移動或兩個（以上）同時移動、可允許移動之格數、是否允許跳格等各項約定而有所不同。

㈡各種情境的分野有助於我們掌握題意及釐清解題思路。可惜它們都只有簡答，未能得知解題的策略及方向，因此我們改往歷屆科展作品方面探尋。由於移位遊戲未涉及任何高深的數學領域，只要在實際操作中累積心得，靠“熟能生巧”就可獲致結果，因

此我們只在國小科展優勝作品專輯裡發現了兩件相關的資料（請參見〔7〕及〔12〕），它們所探討的問題之起點與終點和上述＜3＞例類似；研究的方式則依賴作者們累記許許多多的遊戲經驗（像記棋譜般），以苦行僧的精神拿時間換取結果。而他們對於在其結論中所提的「最少次數」，也未能說出明確證據可以讓人澄清疑慮，因此未能對我們的研究問題提供幫助。

在建中林礽堂老師（民83）所舉的高中生獨立研究例子裡（請參見〔4〕），對研究主題一

若有$a$種兩兩相異之物，以固定的順序排成一串，再將$b$串此種組合物排成一整列。今規定每次只可將任意相鄰兩物的位置互相調換，那麼要如何調換，才能在最少的交換次數下，將同種的物體都各自集合在一起？（其中$a,b$均為不小於2的自然數）

則曾有過下述結論：

將○×△○×△．．．．（$a$種圖形，重覆$b$串）重新排列，使同種圖形彼此相鄰的各種方法中，以排成○○○．．．×××．．．△△△．．．（和原來圖形順序相同）最快、且所需最少移動次數：

$n(a,b)=ab(a-1)(b-1)/4$　且$n(a,b)=n(b,a)$

作者從操作紀錄表中察覺所需最少移動次數是一個等差數列，進而設法給予論証。只是在問題情境上，它是沒有空位的；在遊戲規則上，它是交換而非左右移或跳格的。這和我們要探討的問題又有相當的不同，難易度自然也不一樣。

(三)在數學傳播季刊上的“數播信箱”裡，曾有一連串就許宗義先生（民69）去函所提的“同行黑白棋子移動問題”引起討論（參見〔1〕,〔2〕,〔5〕,〔6〕,〔9〕及〔10〕）；界定問題的方式如同上文＜1＞例，大家分別提出棋子數為黑白各四至八枚時的正確移法．較特別的是，楊鴻榮先生（民71）從日本的“科學朝日”所翻譯者內含該題的一般性解法，但對解答個數的認定則仍迄無定論。

參考上述文獻的各類問題與解法，對本文所要探討的目標不無助益。尤其在觀察實作上獲致相當經驗，能更有效地抓住要訣。至於想到用建構樹狀圖來進一步探索問題，則是參考了戴久永先生（民70）的見解。樹狀圖是一種很簡單實用的數學方法，中學生在上機率課程時都會學到它；除此之外，它還是一種有效的計數工具，也是解決邏輯性推理問題的利器，可以把來龍去脈攤在面前一目瞭然。我們就是看上樹狀圖的這些優點，而把它運用在本文所要討論的問題上。★