中華民國參加1997第38屆國際數學奧林匹亞競賽第二階段選訓模擬競試試題及參考解答

中華民國數學奧林匹亞委員會

一、引言：

中華民國爲參加1997年7月18日～31日，在阿根廷 馬普拉塔舉行的第38屆國際數學奧林匹亞競賽的活動，已在中華民國數學奧林匹亞委員會主辦及中華民國數學會、國立臺灣師範大學協辦下，於4月8～16日國立臺灣師範大學理學院完成了第一階段的選訓工作，計選出十位儲訓代表，參加從5月8日至15日在國立臺灣師範大學理學院舉行的第二階段前二週國家代表隊選訓營；在此階段，順利產生六位正選代表及二位候補代表，將繼續參加從5月26日起在國立臺灣師範大學理學院及中央研究院數研究所舉行的集訓。第一階段選訓營的成績佔國家代表隊決選成績的60％。在第一階段選訓營期間共舉辦了三次模擬競試、十六個專題探討、十個主題共十四道獨立研究問題。三次模擬競試每次佔決選成績的13％，共佔39％，獨立研究解題評分成績佔決選成績的10％，亞太奧林匹亞競賽成績佔決選成績的8％，個別評量成績佔決選成績的3％。第二階段前二週選訓營的成積佔國家代表隊決選成績的40％。在第二階段前二週選訓營期間共舉辦了二次模擬競試、十七個專題探討、十一個主題共十二道獨立研究問題。二次模擬競試每次佔決選成績的13％，共佔26％，獨立研究解題評分成績佔決選成績的10％，個別評量成績佔決選成績的4％。以下針對第二階段的二次模擬競試提出解答，並在附錄中列出十一個主題的十二道獨立研究問題，作爲輔導數學資優教學的參考。

二、中華民國參加1997第38屆國際數學奧林匹亞競賽第二階段前二週選訓模擬競試試題

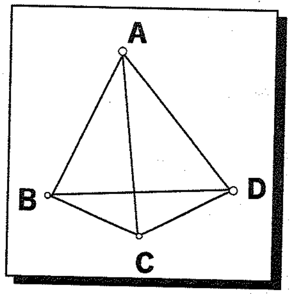
一九九七年數學奧林匹亞選訓營
第二階段第一次模擬競試試題
1997年5月11日 8:00～12:30

問題1：證明不大於n（n爲自然數）的質數個數恰等於

$$\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{(i-1)!+1}{i}-\left[\frac{(i-1!)}{i}\right]\right],$$

其中[x]代表不大於 x 的最大整數。

問題 2：設$ABCD$爲一四面體，如圖所示。



證明：

(1)若$\overline{AB}=\overline{CD},\ \overline{AD}=\overline{BC},\ \overline{AC}=\overline{BD}$，

則$\triangle ABC,\ \triangle ACD,\ \triangle ABD,\ \triangle BCD$

均爲銳角三角形。

(2)若$\triangle ABC\ \ \triangle ACD,\ \triangle ABD,\ \triangle BCD$

四個三角形面積相等，則$\overline{AB}=\overline{CD},\ \overline{AD}=\overline{BC},\ \overline{AC}=\overline{BD}$。

問題 3：設 m， n 都是正整數且滿足 n ≥ m，試求滿足下列條件的集合 X 之元素個數的最大值：

(i) $X\subset\{1,2,3,\cdots,n\}$

(ii) X 中任三相異數的和都超過 m。

一九九七年數學奧林匹亞選訓營
第二階段第二次模擬競試試題
1997年5月13日　14:00～18:30

問題 4：試確定所有的整數k，使得有一個函數$f:N\to Z$滿足：

(1)$f(1997)=1998.$

(2)$f(xy)=f(x)+f(y)+kf(d(x,y)).$

其中$d(x,y)$表x,y的最大公因數。

問題 5：設數列$\langle a_n\rangle$滿足

$$a_1=0, a_n=a_{[n/2]}+(-1)^{n(n+1)/2},\ \ n>1.$$

對於每一個非負整數k，試確定所有滿足

$$2^k\le n<2^{k+1},\ 且a_n=0$$

的n之個數。

問題 6 ：設兩長方形的長與寬分別爲$\{a,b\}$與$\{c,d\}$，其中$a<c\le d<b$且$ab<cd$。

證明：第一個長方形可放進第二個長方形內的充要條件爲

$(b^2-a^2)^2\le(bd-ac)^2+(bc-ad)^2$

三、模擬試題參考解答

問題 1 參考解答：

當$i=p$爲質數時，由$Wilson$定理知$(p-1)!+1=kp$，因此

$$\left[\frac{(p-1)!+1}{p}-\left[\frac{(p-1)!}{p}\right]\right]=1$$

當$i>4$爲合成數時，$i\mid(i-1)!$，因此

$$\left[\frac{(i-1)!+1}{i}-\left[\frac{(i-1)!}{i}\right]\right]=0$$

當$i=4$時，

$$\left[\frac{(4-1)!+1}{4}-\left[\frac{(4-1)!}{4}\right]\right]=0$$ 。

問題 2 參考解答：

(1)顯然$\triangle ABC\cong\triangle ACD\cong\triangle ABD\cong\triangle BCD$。

(2)若過四面體$ABCD$各稜的二面角的平面角分別以 x, y, z, α, β,γ表示，若將$\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$向平面BCD作正投影，以 S 表示面積，則有

$S(\triangle ABC)\cos\gamma+S(\triangle ACD)\cos\alpha+S(\triangle ADB)\cos\beta=S(\triangle BCD)$,

由

$S(\triangle ABC)=S(\triangle ACD)=S(\triangle ADB)=S(\triangle BCD)$,

得

$$cso\gamma+\cos\alpha+\cos\beta=1$$

同理有

$$\cos\alpha+\cos y+\cos z=1;\cos\beta+\cos x+\cos z=1;\cos x+\cos y+\cos\gamma=1$$

從而推出

$$\cos x=\cos\alpha,\ \ \cos y=\cos\beta,\ \ \cos z=\cos\gamma,$$

因爲

$$0<x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma<\pi,$$

所以

$$x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$$

作AM垂直於平面BCD，垂足爲M,作AN垂直於BC，垂足爲N；作BP垂直於平面ACD，垂足爲P，作BQ垂直於AD，垂足爲Q，由三垂線定理的逆定理，$MN\perp BC,\ PQ\perp AD$。在直角三角形AMN與直角三角形BPQ中，$\angle ANM=\gamma=z=\angle BQP$又

$$\frac{1}{3}S(\triangle BCD)AM=\frac{1}{3}S(\triangle ACD)BP=V$$

（V表示四面體$ABCD$的體積），從而$AM=BP$，所以$\triangle AMN\cong\triangle BPQ$，於是$AN=BQ$，又因$S$（$\triangle ABC$）$=S$（$\triangle ADB$），所以$BC=AD$，同理可證$AC=BD,\ AB=CD$。

問題3參考解答：

若m ≤ 3則X＝$\{1,2,3,\cdots,n\}$顯然滿足條件（ i ），（ ii ），故X之示素個數的最大值爲n。

設m＞3，令r爲最大正整數使得$r+(r+1)+(r+2)\le m$,得 $r\leq\frac{m-3}{3}$。

故　　$r=[\frac{m-3}{3}]=[\frac{m}{3}]-1$

由r之定義知集合$\{r+1,\ r+2,\ \cdots,n\}$滿足條件（ i ），（ ii ）故滿足條件（ i ），（ ii ）的最大值$\ge n-r=n+1-[\frac{m}{3}]$，另一方面，若X爲一合乎條件（ i ），（ ii ）的集合，令 x 爲X的最小元素。

（a）當$m<3x+3$時，

$$x>\frac{m-3}{3}\ge r$$

則

$$|X|\le n-r=n+1-[\frac{m}{3}]。$$

（b）當$m\ge 3x+3$時，因 x 爲X的最小元素，故知$X\backslash\{x\}\subset\{x+1,\ x+2,\cdots n\}$

且$X\backslash\{x\}$中任二相異數之和都超過$m-x$，令$S=X\backslash\{x\}-x$

則　　　　$S\subset\{1,2,3,\cdots,n-x\}$

且S中任二相異數之和都超過$m-3x$。顯然，$2\le m-3x-1\le n-x$，又知對每一 i 滿足$1\le 2i\le m-3x-1\le n-x$,在i 與 $m-3x-i$中至多只有一數在集合S中，故

$$|S|\le n-x-[\frac{m-3x-1}{2}]=n-[\frac{m-x-1}{2}]$$

（由於$2\le m-3x-1$，故$\frac{m}{3}\le\frac{m-x-1}{2}$）

所以 $|S|\le n-[\frac{m}{3}]$

因此

$|X|=|S|+1\le n+1-[\frac{m}{3}]$ 。

故所求元素個數之最大值爲$n+1-[\frac{m}{3}]$

問題 4 參考解答：

以 $x=y$ 代入(2)中，得

$$f(x^2)=(k+2)f(x)$$

同理，

$$f(x^4)=(k+2)f(x^2)=(k+2)^2f(x)$$

另方面，

$f(x^4)=f(xx^3)=f(x)+f(x^3)+kf(x)=(k+1)f(x)+f(xx^2)$

$=(k+1)f(x)+f(x)+f(x^2)+kf(x)=(2k+2)f(x)+f(x^2)=(3k+4)f(x)$.

因此，$(k+2)^2f(x)=(3k+4)f(x)$，即$(k^2+k)f(x)=0$。但 $f(1997)=1998$，得$k=-1$或$k=0$，當$k=-1$時，則由(2)得 $f(xy)=f(x)+f(y)-f(d(x,y))$，

若$x=p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}$，則易得

$$f(x)=f(p_1)+\cdots+f(p_n)-(n-1)f(1).$$

今定義函數f：$N\to Z$爲$f(1)=0$, $f(1997)=1998$, $f(p)=0$，其中p爲異於1997的質數，而 $f(x)=f(p_1)+\cdots+f(p_n)$，其中$x=p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_1}$，則 f 滿足條件(1)(2)，當$k=0$時，則由(2)得 $f(xy)=f(x)+f(y)$，以$x=y=1$代入，得 $f(1)=0$。當$x=p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}$ 時，$f(x)=\alpha_1f(p_1)+\cdots+\alpha_nf(p_n)$。今定義函數 f：$N\to Z$，爲 $f(1)=0$, $f(1997)=1998$, $f(p)=0$,其中 p 爲異於1997的質數，當$x=p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}$ 時，令$f(x)=\alpha_1f(p_1)+\cdots+\alpha_nf(p_n)$，則 f 滿足條件(1)(2)。因此$k=-1$或$k=0$爲所求。

問題 5 參考解答：

由已知式知，

$$a_n-a_{[n/2]}=\begin{cases}1, & 若n=0或3\ (mod\ \ 4)\\ -1, & 若n=1或2\ (mod\ \ 4)\end{cases}$$

$a_1=0,\ a_2=-1,\ a_3=1,\ a_4=0,\ a_5=-2,\ a_6=0,\ a_7=2,\ a_8=1$

令u_n表示 n 的二進位表示法中型式00與11的個數，
令v_n表示 n 的二進位表示法中型式10與01的個數，
由數學歸納法可證得

$$a_n=u_n-v_n\ ,\ n\in \mathrm{N}\ 。$$

若將n的二進位表示法中每兩個相同的數字（00或11）用”.”分開，而不同的數字用”,”分開，如

$$1.1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,0.0$$

則$u_n=$”.”的個數，且$v_n=$”,”的個數
因此，$a_n=0$的充要條件爲”.”與”,”的個數相等，因

$$2^k\le n<2^{k+1},$$

知 n 的二進位表示法爲$k+1$位數，得”.”與”,”的個數和是k，故$a_n=0$的充要條件爲k是偶數且”.”與”,”的個數都是$k/2$的$k+1$位數有$\binom{k}{k/2}$種。因此

$$a_n=0\text{之}n\text{的個數爲}\begin{cases}\binom{k}{k/2}\ ，\text{若}k\text{爲偶數；}\\ 0\qquad ，\text{若}k\text{爲奇數。}\end{cases}$$

問題 6 參考解答：

設$KLMN$與$PQRS$分別爲以$\{a,b\}$與$\{c,d\}$爲邊長的長方形，其中$KL=b,\ LM=a,\ PQ=d,$及$QR=c$。假設$KLMN$可放進$PQRS$內，則我們可將K放在PS上，且N放在SR上，令$\alpha=\angle MNR,$則

$$a\ \cos\alpha+b\ \sin\alpha\le c,\qquad b\ \cos\alpha+a\ \sin\alpha\le d \qquad (*)$$

反之，若存在一銳角α，使上述兩不等式成立，則容易證得$KLMN$可放進$PQRS$內，令$x=\cos\alpha,\ y=\sin\alpha$，取定一直角坐標系使（$x$，$y$）落在單位圓在第一象限的圓弧$\Gamma$上，由（＊）得

$$\frac{x}{c/a}+\frac{y}{c/b}\le 1,\ \ \frac{x}{d/b}+\frac{y}{d/a}\le 1$$

加上$0\le x,\ \ 0\le y,$可圍成第一象限的一個區域 A. $KLMN$可放進$PQRS$內的充要條件爲Γ與A相交，此等價於兩直線$ax+by=c,\ \ bx+ay=d$的交點落在單位圓外，由于兩直線的交點爲

$$\left(\frac{bd-ac}{b^2-a^2},\frac{bc-ad}{b^2-a^2}\right)$$

因此上述條件可轉為

$$(b^2-a^2)^2 \le (bd-ac)^2+(bc-ad)^2$$

四、附錄：專題探討主題及獨立研究問題

1. 專題探討（一）：組合數學（三），葉永南教授主持；專題探討（二）：函數方程（三），張幼賢教授主持。

獨立研究（一）（二）：

問題1-1：設 f,g：N→N滿足

$$f(n+1)=4g(n)+2f(n) \tag{1}$$

$$2g(n+1)=f(n)+2g(n)+2 \tag{2}$$

且

$$f(1)=0,\ g(1)=1$$

求 $f(n)$ 及 $g(n)$

問題1-2：在某次國慶日的慶典預演時，有1600名學生排成40×40的正方形方陣準備排字練習。每次每位學生都從紅，黃兩種顏色牌子舉出一種牌子。請問共有幾種不同的排法使得每個最小單位正方形上的四位學生恰好舉出兩個紅色及兩個黃色的牌子？

2. 專題探討（三）：代數（一），張瑞吉教授主持；專題探討（四）：立體幾何（二），陳創義教授主持。

獨立研究（三）（四）：

問題2-1：假設

$$f(x)=\frac{3995^x}{3995^x+\sqrt{3995}},$$

試求

$$f\left(\frac{1}{3995}\right)+f\left(\frac{2}{3995}\right)+\cdots+f\left(\frac{3994}{3995}\right)$$

之值

問題2-2：給定一個三角形$\triangle A_1A_2A_3$，設 M_1, M_2, M_3 分別為邊 $\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_3A_1}$，$\overline{A_1A_2}$的中點。在$\triangle A_1A_2A_3$邊上作出三點 B_1, B_2, B_3 如下：對於 $i=1,2,3$, 由中點M_i沿三角形的邊至 B_i 的折線長等於$\triangle A_1A_2A_3$周長的一半，試證：$\overline{M_1B_1}$,$\overline{M_2B_2}$與$\overline{M_3B_3}$共點。

3. 專題探討（五）：不等式（三），傅承德教授主持；專題探討（六）：數論（三），許志農教授主持。

獨立研究（五）（六）：

問題3-1：設 $\{x\}$ 代表最接近 x 的整數。一個整數稱爲〝好數〞是指此數不能表爲

$$n+\{\sqrt{n}\},$$

其中n爲某自然數，試確定所有的好數。

問題3-2：設$a_1,\ a_2,\cdots,a_{1997}$爲1997個正數，且其中有三個數無法構成一個三角形的三邊長。證明：

$$1997^{3994}(a_1a_2\cdots a_{1997})^4<1996^{1997}(a_1^4+a_2^4+\cdots a_{1997}^4)^{1997}。$$

4. 專題探討（七）：三角與幾何（一），賴漢卿教授主持；專題探討（八）：離散數學（三），傅恆霖教授主持。

獨立研究（七）（八）：

問題4-1：點P在$\triangle ABC$內部且滿足

$$\angle PBA=\angle PCA=\frac{1}{3}(\angle ABC+\angle ACB)$$

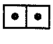
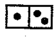
試證：

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}+\overline{PC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{PB}}$$

問題4-2：在單位圓上給定 n 個相異點，設 q 爲長度大於$\sqrt{2}$而端點落在給定點上之線段的個數，證明：$3q\le n^2$。

5. 專題探討（九）：組合數學（四），葉永南教授主持；專題探討（十）：離散數學（四），朱亮儒教授主持。

獨立研究（九）（十）：

問題5-1：骨牌是指長爲2寬爲1的長方形牌上面刻有頭尾2個1～6的點數（如,，…等）今小明有骨牌21個，上面的點數爲$\boxed{i\,|\,j}$其中 $1\le i\le j\le 6$ 每種各一個。小明想把這21個骨牌排成一列，使得相鄰的兩個骨牌的頭尾數字一樣（也就是說$\boxed{a\,|\,b}$接著$\boxed{c\,|\,d}$則$b=c$）。請問小明可以辦得到嗎？爲什麼？

問題5-2：令W表示所有形如

$$a_{2k}\cdot 10^{2k}+a_{2k-2}\cdot 10^{2k-2}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_0$$

的正整數所成集合，其中$k=0,1,2,\cdots$，且對每一個 $i, a_i\in\{1,2,3,\cdots,9\}$。

證明：

對每一正整數$n=2^t\cdot m$，其中 t 爲非負整數，m爲奇數且不是5的倍數，都可在W中找到某一元素是n的倍數。

6. 專題探討（十一）：不等式（四），黃文達教授主持；專題探討（十二）：高斯函數（一），洪有情教授主持。

獨立研究（十一）（十二）：

問題6-1：設$1<x_1<2$且

$$x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2,\quad n=1,2,\cdots$$

證明：

$$|x_n-\sqrt{2}|<\frac{1}{2^n},\ \forall n\geq 3.$$

問題6-2：試求所有滿足：

$$\left[x+\frac{1}{1998}\right]+\left[x+\frac{3}{1998}\right]+\cdots+\left[x+\frac{1997}{1998}\right]=[999x]$$

的實數 x，並證明你的結論，其中$[z]$是代表不大於 z 的最大整數。

7. 專題探討（十三）：複數幾何（二），趙文敏授主持；專題探討（十四）：數論（四）：許志農教授主持；專題探討（十五）：不定方程（三），洪有情教授主持；專題探討（十六）：函數方程（四）：張幼賢教授主持；專題探討（十七）：代數（二），林哲雄教授主持。

★