

數學教育中目前大眾所關切之一個主題—— 數字常識

楊德清

私立新埔工商專科學校

摘要：最近幾年在小學及中學的數學教育中數字常識 (number Sense) 的發展已經為許多先進國家，諸如美國，英國，澳洲，瑞典，德國等國所強調。他們相信數字常識的教授是數學教育中最為重要的主題。這篇文章的主要目的是在介紹什麼是數字常識，它包含那些基本元素，它的重要性，以及將來我們的數學教育應該如何做。當我們企盼及尋求數學教育改革時，個人深信，中、小學的數學教育中數字常識 (number Sense) 的發展與教導應該扮演一個很重要的角色。

簡介

什麼是數字常識？數字常識可以解釋為一個人對數字，運算，以及它們之間關係的一般性瞭解。它是一種有關於數字之直觀上的感覺。它也包括了以靈活的方法使用這種直覺上的瞭解聯結數字和運算的能力，以及發展靈活的策略以處理數字和運算 (Howden, 1989; McIntosh, Reys, & Reys, 1992; Reys, Barger, Dougherty, Hope, Lembke, Markovits, Parnas, Reehm, Sturdevant, Weber, & Bruckheimer, 1991; Reys, B., 1994; Sowder, 1992)。

在過去的15年，數學教育家已經越來越重視“數字常識”的發展。它被視為數學教育中一個很重要的主題。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]) 所出版之數學課程與評鑑之準則 (The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989) 以及澳洲數學教育協會 (Australian Education Council) 所出版之澳洲全國數學教育白皮書 (National Statement on Mathematics for Australian Schools, 1994) 兩者皆強調數字常識的重要性而且敘述數字常識的發展是學校數學教育的一個主要成果。

許多目前的關注對於發展數字常識是源於過份強調傳統的算數演算法則的一種反應以及完全缺乏數字概念。隨著有意義的學習數學以及單調的學習傳統的演算法則的價值已經被深思熟慮地討論了許多年 (Brownell, 1935; Hiebert, 1984)，數字常識並不是一個新的主題。一些研究計畫 (Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatly, Trigatti, & Perlwitz, 1991; Markovits & Sowder, 1994; Treffers, 1991; Wright, 1994) 證明學生在設

計良好以及具有建設性的教學下比在傳統的演算法則主宰下的教學更容易發展數字常識。在臺灣，我們的數學教育非常強調標準演算法則的教授，因此許多的缺點顯現。例如學生通常只知道機械式的背誦公式而且用得很好，然而學生們通常不知道他們在學什麼。因此，數學老師應該知道什麼是數字常識，它的重要性，以及知道如何去幫助他們的學生意義化數學觀念。

什麼是數字常識？

許多的文獻以及最近的研究 (Greeno, 1991; NCTM, 1989; McIntosh, Reys, & Reys, 1992; Reys, B., 1994; Resnick, 1989; Sowder, 1992; Sowder, 1994; Sowder & Schappelle, 1989) 討論了許多數字常識的元素。雖然許多的數學教育家目前仍然努力於定義數字常識的組成元素，基本上而言它包含了下列幾個部分：

1. 能夠有理化數字的意義

一些數學教育家 (Brownell, 1935; Hiebert, 1984) 認為有意義化的瞭解數字系統以及它的結構對於學習數學是很重要的。美國數學教師協會所出版之標準數學課程 (Standards) 強調如果孩童想要去有理化使用於日常生活中的數字，則他們必須瞭解數字的基本意義。美國學者 Sowder 和 Schappelle (1989) 敘述“瞭解數字的基本意義是數字常識中最重要的一個元素” (p.342)。美國學者 Howden (1989) 曾經訪問一班一年級的學生，並要求學生告訴她“24”代表什麼意義？一些學生能夠從廣義的角度來回答這個問題；例如，“二毛錢四分”，“二打的鉛筆”，“二打的蛋”，“四個五分錢和四個一毛錢”，“25分錢取走一分錢”，等等，此即代表瞭解數字之基本意義。

2. 知道何時去分解與組合數字

此種能力包括了能夠以一種相同的形態去表達數字以便於數字的運算。它也包含可以彈性地使用不同的形式以呈現數字和概略地選擇適當的表達式以執行運算能力。例如，在使用心算方法計算 240×0.25 以前，知道應用 $0.25 = 1/4$ 的方法以利於計算，或分解 24×25 之此種型態成爲 $6 \times 4 \times 25$ ，或 6×100 以方便於心算的執行。

美國學者 Carraher, Carraher, 與 Schlieman (1987) 在其使用口述測驗數學的研究中發現學生能夠應用分解數字的方法。例如，當要求學生計算 $252 - 57$ 的時候，其中一個學生分解 252 成爲 $200 + 52$ ，然後分解 57 成爲 $52 + 5$ 。兩邊的 52 可以被消去，然後剩餘的 5 可以從 200 中被取走 (p.92)。他們發現分解的方法在加法和減法中被孩童至少使用一次而且 85% 的機率是正確的。

在澳洲和美國的數學教育家 *McIntosh, Reys, Reys, Bana, & Farrel (in press)* 的研究中，研究者發現學生們使用了許多加法，減法，和乘法之分解數字之方法的例子。兒童能夠自心中地分解 $165 + 99$ 成爲 $165 + 100 - 1$ ，或者分解 $264 - 99$ 成爲 $264 - 100 + 1$ 。在某些問題中一些孩童的心算過程通常建立於將一個數字分解爲多個。例如，當要求學生去計算 38×50 ，他們會分解 38 成爲 19×2 而且解釋說“ 2 乘以 50 是 100 ，而且 19 乘以 100 是 1900 ”，或分解 38×50 成爲 $40 \times 50 - 2 \times 50$ ，然後得到正確的答案。

3. 認識相對的和絕對的數字之大小

認知一個數字之大小包括有能力去比較和排序數字，此爲數字常識之一個重要的元素。美國學者 *Markovits* 和 *Sowder* (1994) 陳述“在數字範圍內，瞭解數字大小包含能夠去比較數字，鑑定兩個數字中那一個較接近第三個數字，排列數字，以及找出兩個數字中所包含之其它數字” (p.6)。例如，學生瞭解 $1/5$ 是小於 $1/3$ ，或者是 1359 小於 1500 。這個特徵包含了下列幾個特點：有能力去比較及排列數字之大小（如：由小到大排列下列數字： 0.595 ， $3/5$ ， 5.8 ， 61% ， 0.3562 ）判別二個數字或二組運算結果中那一個較接近另一個數字（如： $3/8$ 或 $7/13$ 較接近於 $1/2$ ？）。

美國學者 *Sowder* 和 *Schappelle* (1994) 認爲瞭解相對的和絕對的數字大小是很重要的對於判斷計算結果的合理性。例如，美國學者 *McIntosh, Reys, Reys, Bana, 和 Farrel* (出版中) 與 *楊德清 (Yang, D. C., 1995)* 的研究結果顯示，當要求學生使用心算法估計下列的乘積結果以找出小數點的位置時

$$534.6 \times 0.545 = 291357$$

許多學生缺乏數字常識的知識。

4. 有能力去使用基準點 (Benchmark)

基準點 (*Benchmark*) 可以解釋爲可依賴以作爲標準之東西，如 $1/2$ ，當要判斷不同分數之大小時。例如使用 1 當作基準點 (*Benchmark*)，分別 $8/9$ 與 $13/14$ 的和就應該接近 2 而且小於 2 ，因爲這兩個分數都比 1 小一點點。澳洲和美國學者 *McIntosh, Reys, & Reys* (1992) 陳述說“基準點 (*Benchmark*) 通常都被使用於判斷一個答案的大小或選則一個約略數字以便於心算的處理程序” (p.6)。例如當學生被要求去比較 96 乘以 0.46 的結果和 48 時，學生通常會認爲“ 96 乘以 0.46 的結果比 48 還小，因爲 0.46 比 $1/2 = 0.5$ 還小而且 $96 \times 0.5 = 48$ ”。

美國學者 *Resnick* (1989) 認爲基準點 (*Benchmark*) 是使用於“將已經知道的數字實以推測不確定的事實” (p.36)。

5. 瞭解運算對數字之相對的影響

運算對數字的認知即是瞭解運算在不同的數字包括整數與有理數所產生之影響。美國教師協會所出版之數學課程與評鑑準則（*NCTM*, 1989）強調“運算觀念包括獲得有關於運算對兩個之數字影響的領悟和直覺”。

美國學者 *Behr*（1989）從兩方面賦與數字對運算之特徵。第一是，在一個運算問題中當一個或多個運算元被改變時，瞭解如何去作補償；例如，如果 $248 - 189$ 是 59，則 $258 - 189$ 是多少？第二是去瞭解在改變原來被計算的數字以後何時一個運算的結果會相同。例如， $252 - 194 = 58$ 的結果如何能夠被使用於找出 $247 - 189$ 的答案。

6. 能夠彈性的應用數字與運算的知識於一般的運算結果

此種特徵包括“作各種不同的抉擇：決定什麼型態的答案是適當的（正確的或大概的），決定那一種的計算工具是直接有效的且／或可方便取得的（心算，估算，等等），選擇一種策略，應用這個策略，檢查資料和檢驗運算結果的合理性”（*McIntosh, Reys, & Reys*, 1992, p.7-8）。

數字常識的重要性

美國中小學數學課程與評鑑準則（*NCTM*, 1989）敘述“兒童必須瞭解數字如果他們想要去有意義化使用於日常生活中的數字”（p.38）。許多先進國家的數學教師和數學教育家都認為小學教育的主要目的應該是發展學生的數字常識。美國數學教師協會所出版之標準課程與澳洲教育協會所發表之澳洲全國數學教育白皮書兩者皆強調數字常識得重要性與強調數字常識的發展是學校數學教育的主要結果。

當教授數學的時候強調背誦數學規則，公式，與基本事實等等的計算技巧時，學生可能不會被鼓勵去探討，調查，和聯結數字與運算之關係。因此，學生們可能會不喜歡數學甚至討厭數學。然而，“數字常識建立於學生的天生的直覺和說服他們有意義化數學，數學並不是一群可以被使用的規則”（*Howden*, 1989, p.7）。數字常識培養學生對數學產生自然的感覺。

美國學者 *Paulos*（1988）在他的書名為一無數：數學的文盲以及它的結果，提供了許多缺乏數字常識的概念是如何地影響了個人以及社會整體的發展。例如，“對於無意義之巧合產生過份的感激，輕易地接受假科學，以及無法瞭解社會的交互作用”等等都是歸因於缺乏數字常識的結果（p.5）。

美國教育研究中心所出版之 *Everybody Counts*（1989）陳述說“數字常識可以以

最小的努力而產生良好的以及有用的結果。它並不是盲目地機械式的，而是具彈性的以及綜合性的姿態。它包含了具體的經驗以及口語化的，描述的，和符號的表達方式形成。數字常識聯結於幾何，機率，以及計算以增強正式的算術經驗以產生多重之數量現象的化身”（*National Research Council, p.46-47*）。

未來我們數學教育的方向

數字常識的重要性已經被美國和澳洲的一些報告所強調。無可置疑的從這些文件中最重要的報告就是數字常識應該被考慮為數學課程中主要的組成部分。

國際間數學成就測驗的研究結果不斷地報告臺灣學生的表現排名前面（*Stevenson, Chen, Lee, 1993; Stevenson, Lee, & Srigler, 1986; Stigler, Lee, Stevenson, 1990*）。然而本人之研究結果（*D. C. Yang, 1995*）顯示臺灣學生（國小六年級及國中二年級）具有良好之筆算能力並不意謂著他們擁有良好的數字常識。這個結果顯示學生具有很好的計算技巧並不能夠有意義化他們正在學的是什麼東西。當我們要求數學教育改革的同時，本人認為數字常識的發展應該被考慮為小學數學教育的一個主要教學目標。

數字常識已為許多先進的國家所重視，然而數字常識這個名詞卻沒有在我們的數學課程中被強調，也很少為數學教育家所討論，也很少發現於教育刊物中。因此，有許多步驟可以進行。這篇文章的主要目的在介紹什麼是數字常識，數字常識的組成元素，它的重要性，以及數字常識之發展與教導在學校數學教育之急迫性。並希望藉此促進更多的教師瞭解其重要性，進而激勵更多的學者參與這方面之研究。

參考文獻

- Australian Education Council (1991). A National Statement on Mathematics for Australian Schools. A joint project of the States, Territories and the commonwealth of Australia, Australian Education Council and the Curriculum Cooperation.*
- Behr, M. J. (1989). Reflections on the conference. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference. San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.*
- Brownell, W. A. (1935). Psychological Consideration in the Learning and the Teaching of Arithmetic. In The Teaching of Arithmetic, Tenth Yearbook of the National*

- Council of Teachers of Mathematics*, edited by W. D. Reeve, pp.1-31. New York: Bureau of Publication, Teachers College, Columbia University.
- Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1987) . *Written and oral mathematics. Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (2) , 83-97.
- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatly, G., Trigatti, B. & Perlwitz, M. (1991) . *Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (1) , 3-29.
- Greeno, J. G. (1991) . *Number Sense as situated knowing in a conceptual domain. Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (3) , 170-218.
- Hibert, J (1984) . *Children's mathematics learning:The struggle to link form and understanding. The Elementary School Journal*, 84, 496-513.
- Howden, H (1989) . *Teaching number sense. Arithmetic Teachers*, 36(6), 6-11.
- Markovitz, Z & Sowder, J. T. (1994) . *Developing number sense:An intervention study in grade 7. Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (1) , 4-29.
- McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E. (1992) . *A proposed framework for examining basic number sense. For the Learning of Mathematics*, 12, 2-8.
- Mcintosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E., Bana, J., & Farrel, B. (in press) . *Number Sense in School Mathematics:Performance of students aged 8 to 14 in Australia and the United States.*
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) . Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA:NCTM.*
- National Research Council (NRC, 1989) . Everybody Counts. Washington, D. C.: National Academy Press.*
- Paulos, J. A. (1988) . *Innumeracy:Mathematical illiteracy and its consequence. New York:Hill and Wang.*
- Resnick, L. B. (1989) . *Defining, assessing, and teaching number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.) , Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics:Report of a Conference. San Diego, CA:San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.*
- Reys, B. J. (1994) . *Promoting number sense in Middle Grades. Teaching Mathematics*

in the Middle School. 1 (2) , 114 - 120.

Sowder J. T. (1992) . *Making sense of numbers in school mathematics*. In G. Leihardt, R. & R. Hatrup (Eds.) , *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1-51) . Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sowder, J. T. & Schappelle, B. (1989) . *Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference*. San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Sowder, J. T. & Schappelle, B. (1994) . *Number sense making*. *Arithmetic Teacher*, 41 (2) . 342 - 345.

Stevenson, H. W., Lee, S. Y., & Stigler, J. W. (1986) . *Mathematical achievement of Chinese, Japanese and American children*. *Science*, 231, 693 - 99.

Stevenson, H. W., Chen, C., & Lee, S. Y. (1993) . *Mathematical achievement of Chinese, Japanese and American children: Ten years later*. *Science*, 259, 53 - 59.

Stigler, J. W., Lee, S. Y., & Stenenson, H. W. (1991) . *Mathematical knowledge of Japanese, Chinese and American elementary school children*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Treffers, A (1991) . *Meeting innumeracy at primary school*. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (4) , 333 - 352.

Wright, R. J. (1994) . *A study of the numerical development of 5 - year - olds and 6 - year - olds*. *Educational Studies in Mathematics*, 26 (1) , 25 - 44.

Yang, D. C. (1995) . *Number sense performance and strategies possessed by sixth and eighth grade students in Taiwan*. Unpublished doctoral dissertation, University of Missouri: Columbia. ★