中學數學挑戰徵答題參考解答評析

通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 1026 試確定是否存在正整數n，使得1996^n-1整除1997^n-1。

解答：解法（一）：

不存在，理由如下（矛盾證法）

設正整數n滿足1996^n-1整除1997^n-1，

則由5整除1996^n-1得5整除1997^n-1，

於是$n=4k$，其中$k\in N$，

推得1997整除1996^n-1，

於是1997整除1997^n-1，

但1997不能整除1997^n-1，此爲矛盾。

解法（二）：（採自北一女尤善琦之解法）

1996和1997沒有實質意義，故以x及（$x+1$）代換之

設1996^n-1爲多項式$g(x)=x^n-1$

1997^n-1爲多項式$f(x)=(x+1)^n-1$

$g(x)=x^n-1=x^n-1^n=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)$

如果$g(x)|f(x)$那麼$(x-1)$也是$f(x)$的因式，即$(x-1)|f(x)$

依餘式定理$f(1)=2^n-1=0$

解得$n=0$與n爲正整數條件不符

故不存在正整數n，使1996^n-1整除1997^n-1

《解題重點》

1. 由特例觀察1996^n-1整除1997^n-1的必要條件爲$n=4k$。
2. 矛盾證法（即間接證法）。
3. 因數分解當 n 爲偶數，$a^n-b^n=(a\pm b)(a^{n-1}\mp a^{n-2}b\pm a^{n-3}b^2\mp\cdots\cdots\mp b^{n-1})$

《評析》

1. 本題配合高一基礎數學第一冊整數的性質而命題，徵答人數與得分率都不如預期的理想，計有北一女尤善琦等44位徵答，得分率0.81；顯示跟一般升學導向的參考書籍差異較大的思考題高一、高二學生尙待加強訓練培養。

2. 部分徵答者作法如參考解法（一），亦有部分學生思考欠周延；尤善琦將問題一般化，用多項式處理最簡捷。

3. 有學生證明$1996|1997^n-1$，且$(1996^n-1,1996k_1)=1$來說明n不存在，這作法是錯的。

問題編號 1027　對任意正整數n，定義函數S（n）表示滿足方程式$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$的正整數對的個數。例如S（2）=3，S（9）=5。

試求所有使S（n）＝1997的正整數n。

解答：1. 對任意正整數n，當x，y也是正整數且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$時，$x>n$且$y>n$。

因此令$x=n+a$，$y=n+b$，a,b為正整數，可得到$\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}=\frac{1}{n}\Leftrightarrow n^2=ab$。

2. 由1的推論可知，正整數x，y滿足$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$的解的數對個數就是使$n^2=ab$的（$a,b$）數對的個數。

3. 就正整數而言，由算術基本定理知，$n>1$時，n可分解為質因數之積，以$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$表之，其中$p_1,p_2,\cdots,p_k$為質數。

此時$n^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}$同時$n^2=ab$時，（$a,b$）數對的個數為$(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)(2\alpha_3+1)\cdots(2\alpha_k+1)$。

4. 由S（n）的定義與1.，2.，3.的討論得

欲使$S(n)=1997\Leftrightarrow(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)(2\alpha_3+1)\cdots(2\alpha_k+1)=1997$，

但1997為一質數，所以$k=1$，且$\alpha=998$即$n=p_1^{998}$（p_1為質數），

也就是$S(n)=1997$的充要條件是n為某質數的998次冪。

《解題重點》

1. 算術基本定理：大於等於2的任意正整數有唯一的質因數積表示法。

2. 正因數的個數。

3. 不定方程式根的求法，將$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$的解轉化成$n^2=ab$（其中$a=x-n$，$b=y-n$）的形式。

《評析》

1. 本題參與徵答人數與得分率較優於前題（1026），計有金門高中翁克全等47位，得分率0.86。

2. 部分學生導出$S(n)=p^{998}$，p為任意整數，沒考慮p為質數。

3. 有些學生沒注意到1997爲質數導致結論錯誤，以致得$S(n)$是998個質數之積。

4. 北一女官怡君解題相當扼要清晰，答題品質甚佳。

問題編號 1028　試確定所有的正整數 m、n，使得 $\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{m}}+\left(\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{1}{n}}>1$。

解答：解法（一）

m，n 都等於 1 以外的所有正整數，

當 m > 1，x > 0 時，由二項展開式易知

$(1+x)^n>1+mx$，於是 $\left(1+\frac{n}{m}\right)^m>1+n \Rightarrow (1+n)^{\frac{1}{m}}<1+\frac{n}{m}$……①

另外 $(1+m)^{\frac{1}{n}}\leq 1+\frac{m}{n}$……②，（此時 n 可爲 1），

由①，②知：當 m ＞ 1，n ≥ 1 的整數，

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{m}}+\left(\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{1}{n}}>\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}=1,$$

同理：當 n > 1，m ≥ 1 的整數，原問題的不等式成立。

解法（二）：（採自師大附中王世豪，雄中蔡昇甫等高二學生之解法）

利用算幾不等式：

$$(n+1)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{n+1}=\sqrt[m]{(n+1)\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots\cdots 1}_{(m-1)\text{個}1}}\underset{\text{當}m\geq 2}{<}\frac{(n+1)+(m-1)}{m}=\frac{(n+m)}{m}$$

∴ $\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{m}}>\frac{m}{n+m}$　（當$n=m=1$時等號成立）———（A）

同理 $\left(\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{1}{n}}>\frac{n}{n+m}$　（當$n=m=1$時等號成立）———（B）

（A）+（B）得 $\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{m}}+\left(\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{1}{n}}>\frac{m}{n+m}+\frac{n}{n+m}=1$

當n,m不同時爲1時（即$nm\geq 2$）成立。

《解題重點》

1. 特例$m=n=1$時不成立，其餘觀察$m=1,n=2$，$m=-1,n=3$特例都成立，猜測正確答案。

2. 二項式展開。

3. 基本不等式的性質。

4. 利用算幾不等式。

《評析》

1. 本題係配合高一基礎數學第二冊第一章指數題材命題，解法（一），完全配合高一學生學習程度，而解法（二）大多爲高二以上學生之解法。
2. 本題在本期徵答題中難度最高（得分率最低）且徵答人數最少，僅有武陵高中游志強等34位，顯示高一學生初學習指數單元，題材較生疏，有待給予較長時間的訓練與經驗累積。
3. 部分作答以直接討論不等式，思考解題方式頗佳，例如北一女官怡君及成功高中許哲偉等。

問題編號 1029

設$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$是從-2，-1，0，1這四個整數內取值的數列，且滿足下列三個條件：(1) $\sum_{j=1}^{n}x_j=-16$，(2) $\sum_{j=1}^{n}x_j^{\,2}=48$，(3) $\sum_{j=1}^{n}x_j^{\,3}=-70$，

試求$\sum_{j=1}^{n}x_j^{\,5}$之值。

解答：解法（一）：

設$x_1,x_2\cdots\cdots,x_n$中有 s 個值取 -1， t 個值取 1 ， r 個值取 -2，

則

$$(A)\begin{cases}-s+t-2r=-16\ldots\ldots① \\ s+t+4r=48\ldots\ldots② \\ -s+t-8r=-70\ldots\ldots③\end{cases}$$

解聯立方程組(A)得：$s=5,t=7,r=9$

故$\sum_{j=1}^{n}x_j^5=5\cdot(-1)^5+7\cdot(1)^5+9\cdot(2)^5=-5+7-288=-286$

解法（二）：（採自博愛國小朱浩瑋之解法）

0的任何次方皆爲0，在（1）（2）（3）中，0之個數不受影響。

若$x_i=\pm1$或0（$1\leq i\leq n$），則$x_i=x_i^3=\pm1$或0。惟有$x_i=-2$，x_i才不等於x_i^3，故在（1）（3）中得數不同之影響僅在$x_i=-2$時，才有差異，

而$-2-(-2)^3=6$,$-16-(-70)=54$，$\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_i^3$中，只要$x_i=-2$出現的次數多一次，得數多6 ，但在$\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_i^3=54=6\times9$中，在$x_1,x_2,\ldots.x_n$中，-2出現了9次。

$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=-16$，其中有9項之值爲-2，0次數又不受影響，

$9(-2)=-18,\ -16-(-18)=2$，表示在此數列中，

1出現之次數又比-1多2次。

又$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2=48$，又$(-1)^2=1^2=1$，-2有9次，

$(-2)^2\times9=36,\ 48-36=12$；-1，1平方皆爲1，

故-1及1共出現$\frac{12}{1}=12$次。

由前面可知，-2有9次，-1有$\frac{12-2}{2}=\frac{10}{2}=5$次，0不重要，1有$5+2=7$次

故可以得知：$\sum_{j=1}^{n}x_j^5=9\cdot(-2)^5+5\cdot(-1)+7\cdot 1=9\cdot(-32)-5+7=-288+2=-286$

《解題重點》

1. 了解對稱方程式。
2. 解聯立方程組。

《評析》

1. 本題參與徵答數最多，計有台南女中劉佩玲等76位，得分率0.99，幾乎都得滿分。
2. 經由設定四個可能取值項數後，轉換成三元一次方程式求解，就得到了簡易的三元一次方程式組，順利得到所欲求之五次方和，這方面的技術是國內高中生的擅長題材。
3. 高市博愛國小朱浩瑋想法很直觀，觀察分析取值情形，經由(1)，(3)兩條件得到取值-2的項數，就如探囊取物而得到所要求的答案，值得喝采。

問題編號 1030

求滿足下列兩條件的所有多項式$P(x)$：

(i) $P(0)=0$

(ii) 對任意實數x，等式$P(x^3+1)=(P(x))^3+1$恆成立。

解答：1. 由(i)與(ii)的條件，得$P(1)=(P(0))^3+1=1$。

2. $P(2)=P(1^3+1)=(P(1))^3+1=2$

$P(2^3+1)=(P(2))^3+1=2^3+1=9$，即$P(9)=9$

$P(9^3+1)=(P(9))^3+1=9^3+1$，即$P(730)=730$

依此法則推演下去，

易知$P(x)=x$有無窮多個解，

$P(x)-x=0$為多項式方程式，如果$P(x)$為n次多項式，

則$P(x)-x=0$最多有n個解，所以可知$P(x)-x$為零多項式，

即$P(x)=x$。

3. 另一方面$P(x)=x$多項式，顯然滿足題設的兩條件，所以多項式$P(x)=x$為唯一滿足條件的多項式。

《解題種點》

1. 由已知條件從0開始逐步得到一些特殊的多項函數值的關係。

2. 代數基本定理：n次多項式方程恰有n個根。

《評析》

1. 本題配合高一基礎數學多項式題材而設計，參與徵答人數略少，計有建中楊政達等41位，得分率0.79，完全跟預估一致。
2. 大部分徵答者的解答思想跟參考答案一樣，但寫得不夠完整，部分使用比較係數法處理，但亦不甚完整而沒能得到結論。
3. 本題的主要困難在於活用恆等定理（代數基本定理），高中生在這個主題應待加強訓練。

評註：

1. 本次徵答統計簡表如下：

總人數 86 人	問題編號	1026	1027	1028	1029	1030
	得分	249	282	169	513	227
	徵答人數	44	47	34	74	41
	得分率	0.81	0.86	0.71	0.99	0.79
一年級 65 人	得分	197	214	103	405	157
	徵答人數	33	35	24	58	29
	得分率	0.85	0.87	0.61	1.00	0.77
二年級 20 人	得分	52	68	61	101	63
	徵答人數	10	11	9	15	11
	得分率	0.74	0.88	0.97	0.96	0.82
三年級 1 人	得分	0	0	5	7	7
	徵答人數	1	1	1	1	1
	得分率	0.00	0.00	0.71	1.00	1.00
參與徵答總校數：18所 計 ： 計畫內 ：10所，非計畫內：8所						

2. 本期（問題編號1026~1030），難度設計應稱允當，惟參與徵答人數較不如預期，探究原因應與三月底的全國科展、校內段考及春假假期有關；另外高三學生僅有1人，大幅減少；徵答人數較多的學校計有建中、武陵高中、嘉義高中及雄中等四所高中。
3. 本期答題品質普遍提高，答題學生就讀學校的分布亦廣。這是好現象。請同學告訴同學，一起來挑戰！
4. 本期徵答題數較多且總分較優異的學生計有：

   高一：建中劉家聖、李國禎、楊政達、鄧敦民；武陵高中游志強；台中一中林宗茂、劉俊緯；嘉中林柏志；雄中盧佑群、王紹宇等十人。

高二：台師大附中王世豪、陳正傑；成功高中許哲偉；武陵高中莊家勛；嘉中黃柏凱；雄中蔡昇甫；協同中學蔡宇承等七人。

5.學生作答之心得感言摘錄：

①有些題目一眼看到會讓我們產生一股躍躍欲試的衝動，所以在我們還來不及思考前就會因爲不「知易」而「行難」了。常常因爲思考不深微（深密精微）才作不出解答，而後就因毅力有限而放棄了，這是很可惜的呀！（建中，李國禎）。

②◆這次的1027乍看之下很難，還特地寫了一個電腦程式來*run*，結果就是在想程式的演算法當中得到靈感，才解出這一題（結果程式沒有用，會*overflow*）。

◆問題1028我的解法乍看之下也有點奇怪，否過應該大概是沒有錯（這次用白努力應該不會白努力）。

◆問題1030我覺得我的解題品質很差，敘述不清楚，邏輯也有問題，用畫圖的方法敘述可能還比較清楚。（建中，陳奕瑋）。

③◆由於時間不太夠，1027題暫時還沒想出，但發現了一個規律：

$S(2)$時有三組，$S(9)$時有五組，$2=2^1$，$9=3^2$。將兩數底數及指數相切，正好爲其組數，是巧合抑或與答案有關，暫時不得其解。

◆1030題要我們求〝所有〞多項式，可能有更高明的算法能求出更多解，但我求出的這種一定成立。

◆經由這次徵答仍覺得自已思考的層面不夠廣，好像局限於特定範圍，眞正的感覺也說不上來，希望在日後的徵答題能使自已思考層面再擴大些。

◆目前市面上的數學辭典少之又少，問老師又不一定願意講，希望以後能登出定理，並希望科教月刊能迅速寄發，每次收到月刊已剩不多時間，若碰到月考更慘，再加上我們是私校，進度又要比一般公立學校超前，若沒有較長時間，在各種壓力下，很難有較突破性的表現，前幾次徵答就在種種壓力下不得不放棄。（道明中學，張芳銘）。

評註：〝實力〞慢慢培養，慢慢從做題中體會。不必急，你會成功的！

④參加了幾次的徵答，覺得這是很有意義的活動，一方面可訓練思考能力，又可以多出一種課外的娛樂，而最吸引我的是前幾次參加徵答，主辦單位不但在我的答案卷上做了某些訂正，更寄回來告知，使我能知道自已的缺失，並加以改正，但最近幾次卻都沒有再收到答案卷，希望徵答小組能回到以往的訂正模式，相信如此對學生在數學上的表達能力等方面必有莫大幫助，謝謝！（協同中學，蔡宇承）。

評註：我們會將你的答案寄回給你的。 ★