教育部八十五學年度高級中學數學能力競賽
決賽試題與參考解答

國立高雄師範大學數學系提供

壹、試題

筆試試題（一）
時間：二小時

注意事項：

(1) 時間分配：2小時，1月3日 (10:00－12:00)

(2) 配分：每題皆爲7分。

(3) 不可使用計算器。

問題一、若 $a_1=2$ 且 $a_{n+1}=2a_n+\sqrt{3a_n^2-12}$，$n\geq 1$。試證：$a_{1996}$ 必爲一整數。

問題二、若 P 爲 $\triangle ABC$ 內部之一點，且有 $\angle PAB=10^\circ$，$\angle PBA=20^\circ$，$\angle PCA=30^\circ$ 及 $\angle PAC=40^\circ$. 試求 $\angle PBC$ 之度數。

問題三、設 n,k 爲正整數，試證：$n^{kn}\geq(n^k+n^{k-1}+\cdots+n+1)^{n-1}$ 且當 $n>1$ 時，$n^{kn}>(n^k+n^{k-1}+\cdots+n+1)^{n-1}$。

筆試試題（二）
時間：二小時

注意事項：

(1) 時間分配：2小時 (14:00－16:00)

(2) 配分：每題皆爲7分。

(3) 不可使用計算器。

問題四、試求所有的整數 a, 使得多項式 x^3-x^2-4x+a 有三個整數根。

問題五、若 p 爲質數，n 爲自然數且 $\sqrt{1-\frac{85}{p^n}}$ 爲有理數，試求 p 與 n 的值。

問題六、設 A 表所有 n 項數列 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 形成的集合，其中 $a_i\in\{1,2,3,4\}$。試問 A 中含有偶數個項爲1的數列有幾個？

口試試題

1. 設長方形紙片$ABCD$其長寬分別爲5及4，今將此紙片對摺使得兩個對角頂點A與C重合，試證摺疊後超出長方形 $ABCD$ 的三角形面積小於5。

2. 請問是否存在二個整數 $A,B\in\{1, 2,\ldots,9\}$ 使得所有$n\geq 2$時，

$$\underbrace{AA\cdots A}_{n\text{個}}\ \underbrace{BB\cdots B6}_{n-1\text{個}}$$

都是完全平方數？

獨立研究試題（一）、（二）
時間：二小時

注意事項：

(1) 時間分配：3時50分 (08:10－12:00)

(2) 配分：每題皆爲7分。

(3) 不可使用計算器。

問題一、設有一實係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0$,

(1)、若 $f(x)$ 之根全部爲實根，試證：對所有$n\geq 2$時，

$a_{n-1}^2\geq 2a_{n-2}a_n$成立。

(2)、若對所有$n\geq 2$時，$a_{n-1}^2\geq 2a_{n-2}a_n$成立時，試問：多項式 $f(x)$ 之根是否全爲實根？

問題二、令Q表示所有有理數的集合 且$Q〔x〕$, 表所有有理係數之多項式形成的集合。設T爲一個由$Q〔x〕$映成至$Q〔x〕$之一對一函數且滿足下列條件：

(1) $T(f(x)+g(x))=T(f(x))+T(g(x))$

(2) $T(f(x)g(x))=T(f(x))T(g(x))$

(3) $T(c)=c,\ \forall c\in Q,$

對任何$f(x), g(x)\in Q〔x〕$均成立。試證：必可找到$a, b\in Q, a\neq 0$使得

$T(f(x))=f(ax+b)$.

問題三、試證：任何一正有理數$\frac{s}{r}$恆可唯一表示成$a_1+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{3!}+\cdots+\frac{a_n}{n!}$其中$a_n\neq 0$, $a_1\geq 0$且當$k>1$時，$0\leq a_k<k$.

問題四、若整數a,b滿足

$$(x^3-3x+1)(ax+b)-3x^2+12=f(x)^2,$$

其中$f(x)$是一個整係數多項式，試求a,b的值。

問題五、若$ABCDEF$爲凸六邊形且 $\overline{AB}/\!/\overline{DE}$ ， $\overline{BC}/\!/\overline{EF}$ 及 $\overline{CD}/\!/\overline{FA}$ 。試證：$\triangle ACE$的面積 = $\triangle BDF$的面積。

問題六、試證： $x_1^2+x_2^2+\cdots x_{1996}^2=1996x_1x_2\cdots x_{1996}$ 的整數解 $x_1,x_2,\cdots,x_{1996}$ 有無限多組。

獨立研究試題（三）、（四）
時間：二小時

注意事項：

(1) 時間分配：4時 (13:30－17:30)

(2) 配分：每題皆爲7分。

(3) 不可使用計算器。

問題七、試證： $(1+\sqrt{2})^{1996}$ 之整數部份必爲奇數。

問題八、試求所有的正整數序對 (m,n) 使得

$$\frac{n^2}{8}+\frac{4}{m}+\frac{1}{4} \text{ 爲整數。}$$

問題九、設長方形$ABCD$其長與寬分別爲m及n. 令一光源自頂點A射出到達長方形之一邊其射出角爲45°，並使此光線繼續經由反射直到再度碰上長方形之頂點，上述光源經反射之歷程稱爲一迴路。若以 $f(m,n)$，表示光源在此長方形一迴路之反射次數，試回答下列問題：

(1)、當m,n互質時，$f(m,n)$之值爲何?

(2)、當 $\frac{m'}{m}=\frac{n'}{n}$ 時，證明 $f(m',n')=f(m,n)$

問題十、設m,n,t,k均爲正整數。若 $n=t^m$，其中t不是3的倍數，而且n的位數爲$10k$位數。試證：n的數字中至少有一個數字出現 $k+1$ 次。

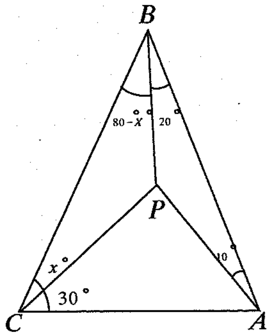
問題十一、在$\triangle ABC$中，H爲垂心，過A 的高交對邊於D點，交$\triangle ABC$之外接圓於另一點E。試證：$\overline{HD}=\overline{DE}$。

問題十二、自$\triangle ABC$的兩邊$\overline{AB}$及$\overline{BC}$分別向外做正方形$ABDE$與正方形$BCFG$. 若$\overline{DG}/\!/\overline{AC}$，試證：$\triangle ABC$爲等腰三角形。

貳、參考解答

筆試試題

競試(一)



問題一、$(a_{n+1}-2a_n)^2=3a_n{}^2-12$

$$a_{n+1}^2-4a_na_{n+1}+a_n{}^2=-12 \quad \forall n\in N$$

$$a_n^2-4a_{n-1}a_n+a_{n-1}^2=-12 \quad \forall n\geq Z$$

相減 $a_{n+1}^2-4a_na_{n+1}+4a_{n-1}a_n-a_{n-1}^2=0$

分解原式得 $a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}$

利用歸納法得 a_n 是一整數 $\forall n \in N$

故 a_{1996} 是一整數

問題二、設 $\angle PCB=x^\circ$ 則 $\angle PBC=80^\circ-x^\circ$

由 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\dfrac{2\sin 10^\circ\ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=2\cos 10^\circ$ ……… (1)

$\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\dfrac{\sin x^\circ}{\sin(80^\circ-x^\circ)}$ ……………………………………………… (2)

$\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PA}}=\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ}=2\sin 40^\circ$ ……………………………………………… (3)

得 $1=\dfrac{4\sin x^\circ\ \sin 40^\circ\ \cos 10^\circ}{\sin(80^\circ-x^\circ)}=\dfrac{2\sin x^\circ\ (\sin 30^\circ+\sin 50^\circ)}{\sin(80^\circ-x^\circ)}$

$=\dfrac{\sin^\circ\ (1+2\cos 40^\circ)}{\sin(80^\circ-x^\circ)}$

化為 $2\sin x^\circ\ \cos 40^\circ=\sin(80^\circ-x^\circ)-\sin x^\circ=2\sin(40^\circ-x^\circ)\cos 40^\circ$

$x^\circ=40^\circ-x^\circ \Rightarrow x=20$

得 $\angle PBC=60^\circ$

問題三、證明：$n^k=\dfrac{(n^{k+1}-1)+1}{n}=\dfrac{(n-1)(n^k+n^{k-1}+....+1)+1}{n}$

$$=\frac{\overbrace{(n^k+n^{k-1}+....+1)+....+(n^k+n^{k-1}+....+1)}^{(n-1)\text{個}}+1}{n}$$

$\geq (n^k+n^{k-1}+....+1)^{\frac{n-1}{n}}$ (利用 $AM\geq GM$)

$\therefore n^{kn}\geq (n^k+n^{k-1}+....+1)^{(n-1)}$

問題四：設 r_1,r_2,r_3 爲 x^3-x^2-4x+a 的三個整數根由根與係數之關係得：

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=-4 \ldots\ldots (2) \\ r_1r_2r_3=a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

因此，

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=(r_1+r_2+r_3)^2-2(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)=1-2(-4)$$

即$r_1^2+r_2^2+r_3^2=9 \ldots\ldots (4)$

假設 $|r_1| \leq |r_2| \leq |r_3|$ 由 (4) 式解得

$|r_1|=|r_2|=0,\ |r_3|=3$ 或 $|r_1|=1,\ |r_2|=2,\ |r_3|=2$

由 (1) 式得 $r_1 \neq -1$, 因而得 $r_1=1$

代入 (1), (2) 式中得

$$\begin{cases} r_2+r_3=0 \\ r_2+r_3+r_2r_3=-4 \end{cases}$$

因此 $(r_1, r_2, r_3)=(1, -2, 2)$ 或 $(1, 2, -2)$

由 (3) 式得 $a=-r_1r_2r_3=4$

最後檢驗，當 $a=4$

$$x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x-2)(x+2)$$

確實有三個整數根 $1, 2, -2$

因此 $a=4$ 爲所求

問題五、分兩種情形：

$(1)\ n=2m$

$$\sqrt{1-\frac{85}{p^n}}=\frac{\sqrt{p^{2m}-85}}{p^m} \in Q \text{，則} p^{2m}-85=y^2 \text{，} y \in Z$$

$$(p^m+y)(p^m-y)=85 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} p^m+y & 85 & 17 \\ \hline p^m-y & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} p^m & 43 & 11 \\ \hline y & 42 & 6 \end{array}$$

所以 $(p, n)=(43, 2)$, $(11, 2)$

$(2)\ n=2m-1\ (m \in N)$

$$\sqrt{1-\frac{85}{p^n}}=\frac{\sqrt{p(p^{2m-1}-5 \cdot 17)}}{p^m} \in Q \Rightarrow P \mid (p^{2m-1}-5 \cdot 17)$$

$\Rightarrow p \mid 5 \cdot 17 \Rightarrow p=5$ 或 17 。

①若$p=5$則$\sqrt{5^{2m-2}-17}>y \Rightarrow 5^{2m-2}-y^2=17$

$$\Rightarrow (5^{m-1}+y)(5^{m-1}-y)=17$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} 5^{m-1}+y & 17 \\ \hline 5^{m-1}-y & 1 \end{array} \text{無解}$$

②若$p=17$亦可得無解

故$p=43,\ n=2$或$p=11,\ n=2$爲僅有的二組解

問題六、令4元n數列中不含1或2的數列新成的集合爲A，所有的4元n數列所成的集合爲B。

則 $|A|=2^n$

定義函數：$f:B-A\rightarrow B-A$如下：

若$a_1a_2\cdots\cdots a_n\in B-A \quad i=min\{\ j \mid a_j=1$或$2\ \}$

則$f(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)=a_1, a_2, \cdots\cdots a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots\cdots a_n$

其中$b_i=\begin{cases} 1 & \text{若 } a_i=2 \\ 2 & \text{若 } a_i=1 \end{cases}$

$\therefore f$ 是$1-1$而且映成函數。

而且是4元$n-$數列中含偶數個0的數列與含奇數個0的數列一一對應

$\therefore$答案是$\dfrac{4^n-2^n}{2}+2n=\dfrac{4^n+2^n}{2}$ ★