中華民國參加1997年第38屆國際數學奧林匹亞競賽 第一階段選訓模擬競試試題及參考解答

中華民國數學奧林匹亞委員會

一、引言

中華民國將參加 1997 年 7 月 18 日～31 日，在阿根廷 馬普拉塔舉行的第 38 屆國際數學奧林匹亞競賽的活動，已在中華民國數學奧林匹亞委員會主辦及中華民國數學會、國立臺灣師範大學協辦下，於 4 月 8～16 日在國立臺灣師範大學理學院完成了第一階段的選訓工作，順利產生十位儲訓代表，繼續參加從 5 月 8 日至 15 日在國立臺灣師範大學理學院舉行的第二階段國家代表隊選訓營。第一階段選訓營的成績佔國家代表隊決選成績的 60 %。在第一階段選訓營期間共舉辦了三次模擬競試、十六個專題探討、十個主題共十四道獨立研究問題。三次模擬競試每次佔決選成績的 13 %，共佔 39 %，獨立研究解題評分成績佔決選成績的 10 %，亞太奧林匹亞競賽成績佔決選成績的 8 %，個別評量成績佔決選成績的 3 %。以下針對三次模擬競試提出解答，並在附錄中列出十個主題的十四道獨立研究問題，作爲輔導數學資優教學的參考。

二、中華民國參1997年國際數學奧林匹亞競賽第一階段選訓模擬競試試題

一九九七年數學奧林匹亞選訓營 第一次模擬競試試題

1997年 4月10日　8:10–12:30

問題 1：設R爲銳角三角形ABC的外接圓半徑，A'，B'，C'分別爲自頂點A，B，C，向對邊$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$所作垂線之三個垂足，S爲$\triangle ABC$之面積，P爲$\triangle A'B'C'$之周長。證明：$2S=pR.$

問題 2：找出滿足$n \mid (n-1)!$ 的所有自然數$n.$

問題 3：計畫在牆上一長$10n$公分（$n\geq 1$）寬20公分的矩形區內舖設長寬都是10公分或長20公分寬10公分的磁磚（可使用單一尺寸的磁磚，也可以混合舖設兩種尺寸的磁磚，但限制磁磚的舖設不能重疊也不能留有空隙），設有a_n種不同的舖法，例如：$a_1=2, a_2=7, a_3=22.$

證明：$a_{1997}=1998+1996(a_1+a_2)+1994(a_3+a_4)+\cdots+2(a_{1995}+a_{1996}).$

一九九七年數學奧林匹亞選訓營
第二次模擬競試試題

1997年 4月12日　8:10 － 12:30

問題 4：設$\triangle ABC$中，K，L及M分別在邊$\overline{AB}$，$\overline{BC}$及$\overline{CA}$上，滿足

$$\frac{AK}{AB}=\frac{BL}{BC}=\frac{CM}{CA}=\frac{1}{3},$$

且知$\triangle AKM$，$\triangle BLK$及$\triangle CML$之外接圓半徑都等長.

證明：$\triangle AKM$，$\triangle BLK$及$\triangle CML$的內切圓半徑都相等.

問題 5：設$a=\frac{q}{p}$，其中p，q為互質的兩正整數. 若實數b，c，d及函數$f:R\to[-1,1]$滿足下列條件:

$f(x+a+b)-f(x+b)=c\cdot[x+2a+[x]-2[x+a]-[b]]+d,\ \forall x\in R$，

其中符號$[r]$表示不大於 r 的最大整數. 證明：

（ i ） $d=c[b]$.

（ ii ）函數 f 為一週期函數. （即存在正數 t 使得 $f(x+t)=f(x)$ ，$x\in R$）

問題 6：令$a_i\in\{1,2,\dots,1997\}, i=1,2,\dots,86,$而且$a_i$與$a_j$的最小公倍數$[a_i,a_j]\ge 1998, i\neq j,$ $1\le i,j\le 86.$ 證明：

$$\sum_{i=1}^{86}\frac{1}{a_i}<\frac{2083}{1997}。$$

一九九七年數學奧林匹亞選訓營
第三次模擬競試試題

1997年 4月14日　8:10 － 12:30

問題 7：試求滿足

$$1+9+9^2+\dots+9^n$$

為一完全平方數的所有非負整數n.

問題 8：證明：對任意n個實數x_1，x_2，…，x_n，必可找到一正數a，使得下列的n個數都是正無理數:

$x_1+\log a, 2x_2+\log a, 3x_3+\log a,\dots\dots, nx_n+\log a.$

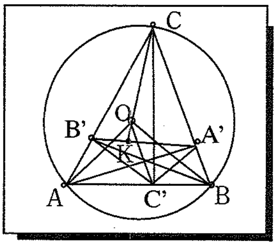
問題 9：設$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數多項式. 假設實數 x 滿足 $|x|\le 1$時，恆有$|P(x)|\le 1.$ 證明：$|a|+|b|+|c|+|d|\le 7.$

問題10：設O為銳角$\triangle ABC$的外心，R為其外接圓的半徑.令D為延長AO與$\triangle OBC$之外接圓的交點，E為延長BO與$\triangle OCA$之外接圓的交點，F為延長CO與$\triangle OAB$之外接圓的交點．證明：

$$OD \cdot OE \cdot OF \geq 8R^3.$$

三．模擬試題參考解答

問題一參考解答：



以S_1表四邊形$OB'AC'$的面積，以S_2表四邊形$OC'BA'$的面積，而以S_3表四邊形$OA'CB'$的面積.

因$OA \perp B'C'$且$OB \perp A'C'$，得

$$S_1 = \frac{1}{2}OA \cdot B'C' = \frac{1}{2}R \cdot B'C', S_2 = \frac{1}{2}OB \cdot A'C' = \frac{1}{2}R \cdot A'C'.$$

設CO與$B'A'$交於點K, 則$CK \perp A'B'$.

S_3等於$\triangle A'C'B'$ 的面積減去$\triangle A'O'B'$的面積，即

$$S_3 = \frac{1}{2}CK \cdot A'B' - \frac{1}{2}OK \cdot A'B' = \frac{1}{2}(CK - OK) \cdot A'B' = \frac{1}{2}R \cdot A'B'.$$

當O落在$\triangle A'B'C'$之內時, $S3$等於$\triangle A'C'B'$與$\triangle A'O'B'$面積之和，亦可得到

$$S_3 = \frac{1}{2}R \cdot A'B'.$$

因此$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}R \cdot (B'C' + C'A' + A'B') = \frac{p}{2} \cdot R$，從而得知$2S = pR$.

問題二參考解答：

顯然$n \leq 4$及n是質數時不合.

猜想：<u>$n > 4$的合成數</u>.

(1)若$n = p^2 > 4, p$為質數，

則

$$2 < p \leq n - 1,$$

得

$$2p \leq p^2 - 1 = n - 1,$$

故

$$p.2p=2p^2 \mid (n-1)!$$

因此

$$n \mid (n-1)!$$

(2)若$n \neq p^2$，p為質數，可令$n=ab$其中

$$1<a<b \leq n-1.$$

如此會產生

$$n=ab \mid (n-1)!$$

的矛盾.

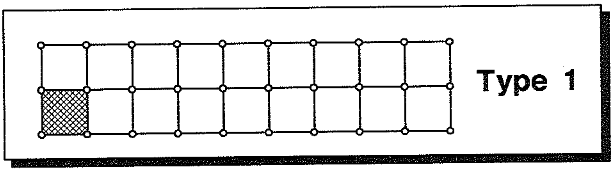
一九九七年數學奧林匹亞選訓營
模擬考（三）

問題三參考解答：

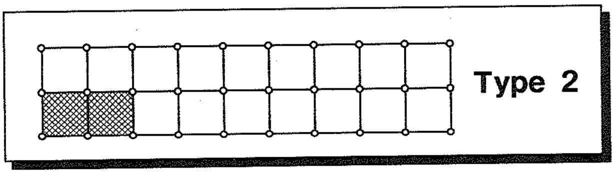
我們將證明以下更一般的形式：

$$a_{2n+1}=2n+a_1+2\left[n(a_1+a_2)+(n-1)(a_3+a_4)+(n-2)(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})\right] \quad (*)$$

設b_n為R_n可被第一類型所覆蓋的個數：



設c_n為R_n可被第二類型所覆蓋的個數：



則

$$a_n=b_n+c_n+a_{n-1} \quad (1)$$

$$b_n=a_{n-1}+b_{n-1} \quad (2)$$

$$c_n=b_{n-1}+a_{n-2} \quad (3)$$

由(1)，(3)得

$$a_n = b_n + b_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-1}. \quad (4)$$

由(2)，(4)得

$$b_n = \frac{1}{2}\left(a_n - a_{n-2}\right). \quad (5)$$

$$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}, \quad n = 4, 5, \ldots$$

將以上方程式對應於$4, 5, \ldots n$相加，得

$$a_n = 2\left(a_4 + a_5 + \ldots + a_{n-1}\right) + 3a_3 + a_{n-2} - a_1.$$

將a_1, a_2, a_3用已知數值代入，得

$$a_n - a_{n-2} = 2\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}\right) + 2, \quad n = 3, 4, \ldots$$

將n用$2n+1$代換，得

$$a_{2n+1} - a_{2n-1} = 2\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}\right) + 2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

將以上方程式對應於$1, 2, \ldots n$相加，得

$$a_{2n+1} - a_1 = 2\left[n(a_1 + a_2) + (n-1)(a_3 + a_4) + (n-2)(a_5 + a_6) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n})\right] + 2n,$$

等價於（＊）.取$n = 998$即爲所求.

問題四參考解答：

我們將證明由給予的條件可推得$\triangle ABC$爲正三角形.

因$\triangle ALK$，$\triangle BLK$及$\triangle CML$之外接圓半徑都等長，令ρ爲這些半徑的長度．由正弦定律

$$KL = 2\rho \sin B, \quad LM = 2\rho \sin C, \quad MK = 2\rho \sin A$$

得

$$KL:LM:MK = \sin B:\sin C:\sin A = b:c:a.$$

因此$\triangle ABC \sim \triangle MKL$.

令

$$KL = tb, Lm = tc, MK = ta.$$

因爲

$$\triangle AKM\text{的面積} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}c\right)\left(\frac{2}{3}b\right)\sin A = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}bc \sin A\right) = \frac{2}{9} \cdot \triangle ABC\text{的面積}.$$

同理，

$$\triangle BLK\text{的面積} = \triangle CML\text{的面積} = \frac{2}{9}\triangle ABC\text{的面積},$$

而得

$$\triangle MKL\text{的面積} = \frac{1}{3}\triangle ABC\text{的面積}.$$

因此

$$t^2 = 1/3.$$

由餘弦定律，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \ \cos A,$$

$$KM^2=\frac{1}{3}a^2=\left(\frac{2b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2-2\frac{2b}{3}\frac{c}{3}\cos A.$$

消去$bc\ \ \cos A$ 項得$a^2=2b^2-c^2$.

同理，可得$b^2=2c^2-a^2$及$c^2=2a^2-b^2$.

最後解得$a=b=c$,即$\triangle ABC$爲正三角形.

因此$\triangle AKM, \triangle BLK$及$\triangle CML$爲全等的三角形，而得這三個三角形的內切圓半徑相等.

問題五參考解答：

首先注意對於任意整數k恆有$[x+k]=[x]+k$.已知條件可表示爲

$$f(x+a+b)-f(x+b)=c.([x+2a]+[x]-2[x+a])-c[b]+d,\ \forall x\in R \qquad (1)$$

設

$$g(x)=[x+a]-[x],\ \forall x\in R$$

則g爲週期函數（由於$g(x+1)=g(x),\ \forall x\in R$）而$g(x)=[a]$或$[a]+1$.(1)可表示爲

$$f(x+a+b)-c\cdot g(x+a)=f(x+b)-c\cdot g(x)+d-c[b],\ \forall x\in R \qquad (2)$$

設

$$F(x)=f(x+b)-c\cdot g(x),\quad \forall x\in R.$$

(2)式則變成

$$F(x+a)=F(x)+d-c[b],\ \forall x\in R. \qquad (3)$$

將(3)之x改寫爲$x+a$得

$$F(x+2a)=F(x+a)+d-c[b]=F(x)+2(d-c[b]). \qquad (4)$$

由歸納法得:

$$F(x+na)=F(x)+n(d-c[b]),\quad \forall n\in N.$$

故

$$F(x+na)-F(x)=n(d-c[b]),\quad \forall n\in N. \qquad (5)$$

由於F爲有界函數（因爲$|F(x)|\le 1+|c|\cdot(|[a]|+1),\ \ \forall x$),等式(5)說明

$$d-c[b]=0.$$

由(3)得知

$$F(x+a)=F(x),\quad \forall x\in R.$$

故F爲週期函數，因此

$$f(x)=F(x-b)+c\cdot g(x-b)$$

也是週期函數.

問題六參考解答：

令

$$A=\{1,2,\cdots,1997\};\ A_i=\{x\in A:a_i|x\},i=1,2,\cdots,86.$$

因爲

$$[a_i,a_j]\geq 1998,i\neq j,1\leq i,j\geq 86,$$

所以

$$A_i\cap A_j=\phi.$$

故

$$|A|\geq\sum_{i=1}^{86}|A_j|,$$

即

$$1997\geq\sum_{i=1}^{86}\left[\frac{1997}{a_i}\right].$$

由於$[x]>x-1$,故

$$1997>\sum_{i=1}^{86}\left(\frac{1997}{a_i}-1\right)$$

所以

$$2083>\sum_{i=1}^{86}\frac{1997}{a_i},$$

$$\frac{2083}{1997}>\sum_{i=1}^{86}\frac{1}{a_i}.$$

問題七參考解答:

令

$$1+9+9^2+\ldots+9^n=k^2$$

可得

$$(3^{n+1}+1)(3^{n+1}-1)=9^{n+1}-1=(9-1)k^2=8k^2.$$

因$(3^{n+1}+1,3^{n+1}-1)=2$,得互質的兩正數k_1,k_2使得

$$\begin{cases}3^{n+1}+1=4k_1^2\\3^{n+1}-1=2k_2^2\end{cases}\qquad(1)$$

或

$$\begin{cases} 3^{n+1}+1=2k_1^2 \\ 3^{n+1}-1=4k_2^2 \end{cases} \qquad (2)$$

當(1)式成立時，

$$3^{n+1}=4k_1^2-1=(2k_1+1)(2k_1-1).$$

因$(2k_1+1,2k_1-1)=1$,故$2k_1+1=3^{n+1}$,$2k_1-1=1$.得$k_1=1,n=0$.

當(2)式成立時，由$3^{n+1}-1=4k_1^2$，得$2=(2k)^2\ (mod\ 3)$,矛盾.

故合乎條件的非負整數n只有$n=0$.

〔另證:〕因$(3^{n+1}+1,3^{n+1}-1)=2$，得互質的兩正數$l_1>l_2$, 使得

$$\begin{cases} 3^{n+1}+1=2l_1 \\ 3^{n+1}-1=2l_2 \end{cases} \qquad (3)$$

故$4l_1l_2=8k^2$,即$l_1l_2=2k^2$.仿上所論，合乎條件的非負整數只有$n=0$.

問題八參考解答：

設$b>k|x_k|$, $\forall\ k=1,2,\ldots,n$,且b爲無理數，則在$10^b,10^{2b},\ldots,10^{(n+1)b}$這$n+1$數中將有一數爲我們所希望找的$a$。如果上述錯誤；則在下面的每列中至少有一個數是有理數

$$\begin{array}{cccc} b+x_1 & b+2x_2 & b+3x_3\ \cdots\cdots & b+nx_n \\ 2b+x_1 & 2b+2x_2 & 2b+3x_3\ \cdots\cdots & 2b+nx_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n+1)b+x_1 & (n+1)b+2x_2 & (n+1)b+3x_3\ \cdots\cdots & (n+1)b+nx_n \end{array}$$

因此，至少有$n+1$個有理數。因爲上面只有n行（$colum$），由鴿籠原理，在某一行中將有兩個有理數，不妨設$ib+kx_k$及$jb+kx_k$同在第 k 行，$i<j$.因此

$$b=\frac{1}{j-i}[(jb+kx_k)-(ib+kx_k)]\in Q$$

此與b之選取矛盾，所以在$10^b,10^{2b},\ldots,10^{(n+1)b}$中有一數爲我們要找的$a$.

問題九參考解答：

令$x=1,-1,1/2$及$-1/2$代入$p(x)=ax3+bx2+cx+d$中，則由假設條件可得

$$|a+b+c+d|\le 1$$
$$|-a+b-c+d|\le 1$$
$$|a+2b+4c+8d|\le 8$$
$$|-a+2b-4c+8d|\le 8$$

由前面的兩個不等式可得 $|a+c|+|b+a|\leq 1$。因此

$|b+a|+|a|-|c|\leq 1$ ………(1)

同樣的，由後面的兩個不等式可得

$$|2b+8d|+4|c|-|a|\leqq 8 \cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)×5+(2)×8：

$$3|a|+3|c|+4|b+4d|+5|b+a|\leq 21$$

因此我們現在僅需証明

$$3|b|+3|d|\leq 4|b+4d|+5|b+d| \cdots\cdots\cdots(3)$$

若$d=0$，（3）式顯然成立，如果$d\neq 0$，令$x=\dfrac{b}{a}$且定義函數

$$f(x)=4|x+4|+5|x+1|-3|x|-3$$

則(3)式成立⇔$f(x)\geq 0,\ \forall x\in R.$

可將實數分成4個區間 $(-\infty,-4),(-4,-1),(-1,0),(0,\infty)$。

當$-\infty<x\leq -4$, $f(x)=-4(x+4)-5(x+1)+3x-3=-6(x+4)\geq 0$

當$-4<x\leq -1$, $f(x)=4(x+4)-5(x+1)+3x-3=2(x+4)>0$

當$-1<x\leq 0$　$f(x)=4(x+4)+5(x+1)+3x-3=12x+18>0$

當$0<x$,　$f(x)=4(x+4)+5(x+1)-3x-3=6x+18>0$

問題十參考解答：

令R,R_1分別爲$\triangle ABC$，$\triangle BDC$的外接圓半徑，則

$$2R_1=\frac{BC}{\sin\angle BOC}=\frac{2R\sin A}{\sin 2A}$$

所以　$R_1=\dfrac{R}{2\cos A}$又$\angle DOC=180^\circ-2B$，

因此$\angle DBO=\angle DOC+\angle CBO$

$$=180^\circ-2B+90^\circ-A$$

$$=90^\circ+C-B$$

且　$OD=2R_1 Sin(90^\circ+C-B)=R\sec A\cos(B-C)$

以相同的方法表示OE及OF，則可得

$(OD)\cdot(OE)\cdot(OF)=R^3\sec A\ \sec B\ \sec C\ \cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)$

所以我們欲証之不等式成立，若且唯若

$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)\geq 8\cos A\ \cos B\ \cos C$

因爲$\cos A=-\cos(B+C)$, $\cos B=-\cos(C+A)$, $\cos C=-\cos(A+B)$

所以上式等價於

$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)\geq -8[\cos(A+B)\cos(B+C)\cos(C+A)]$

將兩邊同除$(\sin B\sin C)(\sin A\sin C)(\sin A\sin B)>0$，則上式又等價於

$$(1+\tan B\tan C)(1+\tan A\tan C)(1+\tan A\tan B)$$
$$\geq -8(1-\tan B\tan C)(1-\tan A\tan C)(1-\tan A\tan B)$$

爲了方便起見，記$x=\tan A,\ y=\tan B,\ z=\tan C$，則上式等價於

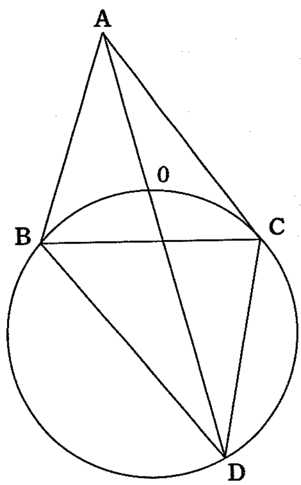
$$(yz+1)(xz+1)(1+xy)\geq 8(yz-1)(xz-1)(xy-1)\cdots\cdots(1)$$

因爲$\triangle ABC$爲銳角三角形，所以$xyz>0$，且$xyz=x+y+z$，將(1)式兩邊乘以xyz，則(1)式等價於

$$(2x+y+z)(2y+x+z)(2z+x+y)\geq(8(y+z)(x+z)(x+y)\cdots\cdots(2)$$

因爲
$$2x+y+z=(x+y)+(x+z)\geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)}$$
$$2x+x+z=(y+x)+(y+z)\geq 2\sqrt{(y+x)(y+z)}$$
$$2z+x+y=(z+x)+(z+y)\geq 2\sqrt{(z+x)(z+y)}$$

所以(2)成立，因而原來欲証之不等式成立，且等號成立$\Leftrightarrow x=y=z\Leftrightarrow\triangle ABC$爲正三角形



四、附錄：專題探討主題及獨立研究問題

1. 專題探討(一)：不等式(一)，黃文達教授主持；專題探討(二)：組合數學(一)，葉永南教授主持

獨立研究(一)(二)：

問題1-1：求$1^1+2^2+\cdots 1997^{1997}$的個位數

問題1-2：假設$x_1, x_2, \cdots, x_n$為非負實數，$n \geqq 3$ 且$x_1+x_2+\cdots+x_n=3$.

證明：$\sum_{i=1}^{2} x_i^2 x_{i+1} \le 4$，其中$x_{n+1}=x_1$.

2. 專題探討(三)：數論(一)，許志農教授主持；專題探討(四)：數論(二)，許志農教授主持

獨立研究(三)(四)：

問題2-1：設數列 $\{f_n\}$ 滿足

$$f_{n+3}=f_{n+2}+f_{n+1}+f_n \text{ , } n \ge 1$$

$$f_1=f_2=f_3=1$$

若正數數d, a（$1 \le a < d$）滿足：對所有自然數 n ，恆有$3 | f_{dn-a}$

試求最小的d及此時a之值。

問題2-2：設 p 是一個質數且（p－1）！＋1是 p 的某次方，試確定所有的 p 值。

問題2-3：設

$$f(x)=3x+2,\ f^n(x)=\underbrace{f(\cdots f(f(x)))}_{n次}\text{ , } n=2,3,4,\cdots$$

試求所有的正整數 k 使得$f^{84}(k)$為85的倍數。

3. 專題探討(五)：複數幾何(一)，趙文敏教授主持；專題探討(六)：不定方程(一)，洪有情教授主持

獨之研究(五)(六)：

問題3-1：求$x^2+8815=2^y$的正整數解。

問題3-2：設在單位圓上有三個點滿足下列條件：任何位於單位圓上的點到這三個點的距離之乘積都不超過 2 。

證明這三個點構成一個正三角形。

4. 專題探討(七)：立體幾何(一)，陳創義教授主持；專題探討(八)：函數方程(一)，張瑞吉教授主持

獨立研究(七)(八)：

問題4 -1：令x,y爲兩實數而且$x>y$.若

$$x^2+y^2=xy+6,\ \ x^3+y^3=xy+17$$

求$x+y$之最大值。

問題4 -2：設四面體中四個面中四個面的面積爲$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$,以S表六個稜長之和的一半，而以A表示邊長爲S之正方形面積。

證明：

$$2A_1+A_2+A_3+A_4\le A.$$

5. 專題探討(九)：不等式(二)，傅承德教授主持；專題探討(十)：離散數學(一)，朱亮儒教授主持

獨立研究(九)(十)：

問題5 -1：設$0\le x,y,z\le 1$,求證：

$$\frac{x}{1+y+z}+\frac{y}{1+z+x}+\frac{z}{1+x+y}+(1-x)(1-y)(1-z)\le 1.$$

問題5 -2：設 r 爲一正整數而 p 爲一質數且滿足 5 ≦ p ≦31，今從以下兩等差數列

A＝$\{2p-1,4p-1,6p-1,\cdots 2rp-1\}$

B＝$\{1997-2rp,1997-(2r-2)p,1997-(2r-4)p,\cdots,1997-2p\}$

中分別選出 k 項與 r － k 項構成一組新的數列

C＝$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_r\}$.

若數列C滿足：

(i)$a_1+a_2+\cdots+a_r=1997r-3r(r+1)p$

與

(ii)對任意不同的i,j恆有$a_i+a_j\neq 1996$,

證明：k 爲$2p$的倍數。

6. 專題探討(土)：函數方程(二)，張幼賢教授主持；專題探討(土)：組合數學(二)，葉永南教授主持

獨立研究(土)(土)：

問題6 -1：設$[0,1]=\{x\in R\ |0\le x\le 1\}$已知$f:[0,1]\to[0,\infty]$爲取値在非負實數的函數且有以下性質：

(i) $f(1)=1$

(ii)若x,y及$x+y$都在$(0,1)$中，則

$f(x+y) \geq f(x)+f(y)$

證明：$f(x) \leq 2x$，對每一$x \in (0,1)$都成立。

問題6-2：設函數f：$[0,\infty] \to [0,\infty]$定義爲

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}, & 0<x<1 \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \geqq 1 \end{cases}$$

證明存在函數 g ：$[1,\infty] \to [0,\infty]$滿足

$$g\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)=f(x),\ x>0,$$

並求所有可能的實數 x，滿足存在一個正整數n，使得$g^n(x)=x$，此處所謂的 $g^n(x)=g(\cdots\cdots(g(x)))$ 爲 g 的 n 次合成函數。

7. 專題探討㈢：組合數學解題策略，葉永南教授主持；專題探討㈣：不定方程㈡，洪有情教授主持；獨立研究㈢㈣：

問題7-1：求最小的正整數 m，（$m \leq 1997$），使得

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{1997}{k}} \geq 2 。$$

問題7-2：求$(x^2+y^2)(x+y-1)=4xy+4$的整數解。

8. 專題探討㈤：數學歸納法解題策略，陳昭地教授主持。 ★