中學數學挑戰徵答題

通訊解題發掘數學資優生研究小組

♠本期徵答截止日期：民國86年6月7日；相關參考解答將刊於科學教育月刊第202期

問題編號 1036

直角三角形ABC，其中$\angle C=90°$。設M爲$\overline{BC}$邊的中點，M到斜邊$\overline{AB}$的距離爲d。

證明：$d \leqq \frac{1}{3}AM$。

問題編號 1037

設$a, b, c,$分別爲$\triangle ABC$的三邊$\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$的邊長，$m_a$,m_b ,m_c分別爲$\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$三邊的中線長，R爲$\triangle ABC$的外接圓的直徑。

證明：$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b} \leqq 6R$，並求等號成立的充要條件。

問題編號 1038

設$\overline{BM}, \overline{BD}$分別爲$\triangle ABC$的中線與分角線，$M \neq D$且都在$\overline{AC}$邊上。$\overline{BN}$是中線$\overline{BM}$關於分角線$\overline{BD}$的對稱線，N在$\overline{AC}$邊上。

證明：$\frac{AN}{CN}=\left(\frac{AD}{CD}\right)^2$。

問題編號 1039

設函數 $f(x,y)=2x^2-6xy+5y^2$，其中 x,y 爲任意整數，

(1)所有不大於86的函數值共有多少個？

(2)證明任意兩個 $f(x,y)$ 函數值的乘積仍然是 $f(x,y)$ 的函數值。

（即證明：對於任意整數u_1, v_1, u_2, v_2，必存在整數u, v，使

$f(u,v)=f(u_1,v_1)\times f(u_2,v_2)$）。

問題編號 1040

將所有的正整數排成沒有相同元素的兩個增數列 $\langle a_n \rangle$，$\langle b_m \rangle$，且此兩數列滿足：

(i) $a_1=1$；

(ii) $a_i+a_j \neq 2^k+2,\ (k=0,1,2,\cdots\cdots)$，$a_i$,a_j爲$\langle a_n\rangle$中任意兩相異項；

(iii) $b_i+b_j \neq 2^k+2,\ (k=0,1,2,\cdots\cdots)$，$b_i$,b_j爲$\langle b_m\rangle$中任意兩相異項。

(1)證明：滿足這些條件的數列$\langle a_n\rangle$，$\langle b_m\rangle$恰有一組。

(2)確定1997，1998各在那個數列裡。

★