中學數學挑戰徵答題參考解答評析

通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號
1021

已知數列$\langle a_n\rangle_{n=1}^{\infty}$，其各項由下列條件所定義

(1)$a_1=1999$，(2)$\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2a_n$，$(n=2,3,4,\cdots)$，

試求a_{1999}之值。

解答：由(2)式得知 $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n-1} a_k+a_n=(n-1)^2a_{n-1}+a_n=n^2a_n$

因此$a_n=\dfrac{(n-1)^2}{n^2-1}a_{n-1}$，即$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$，$n\geq 2$，

由遞推關係即可得

$$a_{1999}=\frac{1998}{2000}a_{1998}=\frac{1998}{2000}\times\frac{1997}{1999}a_{1997}$$

依此關係可歸納得到

$$a_{1999}=\frac{1998}{2000}\times\frac{1997}{1999}\times\frac{1996}{1998}\times\cdots\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}a_1$$

$$=\frac{2a_1}{2000\times1999}=\frac{1}{1000}$$

《解題重點》

1. 由特例猜測遞迴關係式。

2. 化數式化簡求值。

《評析》

1. 本題配合高一基礎數學第一冊數列設計，題型簡淺易懂，參與徵答人數最多，計有豐原高中<u>葉建宏</u>等162人（含高市博愛國小五年級<u>朱浩瑋</u>及嘉縣大林國中二年級<u>游智深</u>等二位）。其中152位都答得很好，僅有10位有較嚴重的錯誤，得分率0.95，高一、高二無明顯的差距，而高三的十位同學都得滿分。

2. 少數同學，懂得從$n=1,2,3,4\cdots$下手，從其中猜出遞迴數列前後項之關係式，如

$$a_2=\frac{1}{1+2}a_1,\qquad a_3=\frac{1}{1+2+3}a_1,$$

$$a_4=\frac{1}{1+2+3+4}a_1,\quad a_5=\frac{1}{1+2+3+4+5}a_1,\cdots$$

由此〝推知〞一般項為$a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}a_1$。

這是好事！但不幸的是忘了證明自己的〝推知〞（猜測）！

3. 數學歸納法的精神著重於下列兩點：

①從簡單的$n=1,2,3,\cdots$嘗試去做，並從中找出〝隱含的規律〞。

②用數學歸納法去證明：你發現的規律。

因為有限項所呈現的規律，不能保證後面無窮多項仍依循這個規律。這一點同學務必要掌握。

問題編號 1022

試求下列聯立方程組的所有實數解：

$$\begin{cases}18x+7x^2y=8y^2\\18y-7xy^2=8x^2\end{cases}。$$

解答：1. 由聯立方程組可以看到$(x,y)=(0,0)$為一組解。

2. 由方程組知$x=0\Leftrightarrow y=0$，$x\neq 0$且$y\neq 0$時，原方程組可以化為

$$\begin{cases}18+7xy=8\cdot\left(\dfrac{y^2}{x}\right)\cdots(1)\\[2mm]18-7xy=8\cdot\left(\dfrac{x^2}{y}\right)\cdots(2)\end{cases}$$

將(1)與(2)兩式相乘得$18^2-(7xy)^2=64xy$

$$\Rightarrow 49(xy)^2-64xy-324=0\Rightarrow(49xy+162)(xy-2)=0$$

$$\Rightarrow xy=\frac{-162}{46}\ or\ 2$$

(i) 當$xy=2$時，由(2)得$18-14=8\cdot\left(\dfrac{x^3}{xy}\right)$

$$\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1\Rightarrow y=2，即(x,y)=(1,2)$$

(ii) 當$xy=\dfrac{-162}{49}$時，由(2)得$18+\dfrac{162}{7}=8\cdot\left(\dfrac{x^3}{xy}\right)$

$$\Rightarrow\frac{2}{7}(63+81)=8\times\frac{-49}{162}x^3$$

$$\Rightarrow x^3=\frac{-9^3\times 2^3}{7^3}\Rightarrow x=\frac{-18}{7}\Rightarrow y=\frac{9}{7}$$

即$(x,y)=\left(\dfrac{-18}{7},\dfrac{9}{7}\right)$

由*1.*與*2.*的討論結果：

此方程組的實數解有三組：(0,0) , (1,2) ,$\left(\frac{-18}{7}, \frac{9}{7}\right)$

《解題重點》

1. $(x,y)=(0,0)$爲一組解，由直觀可得。

2. $x\neq 0$且$y\neq 0$時，將方程組轉化成較簡單的形式。

3. 因式分解。

《評析》

1. 本題配合高一基礎數學第一冊代數題材設計，參與徵答人數亦多，計有台中女中黃佳育等121人（含國二學生游智深），得分率0.90，高中三個年級比較起來，高一學生不僅徵答人數最多且得分率也最高；答題品質較佳者計有建中黃致遠、張智明、戴松青等三位。

2. 很多同學將兩式$\begin{cases} 18x+7x^2y=8y^2 \\ 18y-7xy^2=8x^2 \end{cases}$直接相乘，求得$xy$的三次式求出$xy$值後再分別討論求解，也是一個好辦法，游智深就是用這樣的解法；但少部分人最後方程式解錯了，眞可惜。

問題編號 1023

1,2,3,4 …到 100 等 100 個整數構成的 100 項數列中（次序可以任意對調），能否找到四個數列$<a_k>_{k=1}^{100}$，$<b_k>_{k=1}^{100}$，$<c_k>_{k=1}^{100}$，$<d_k>_{k=1}^{100}$，使$\sum_{k=1}^{100}a_kb_k=2\sum_{k=1}^{100}c_kd_k$。

解答：*1.* 首先我們可推算出下列兩個關係：

$$(i)\ n=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\cdots+100\cdot 100=\sum_{k=1}^{100}k^2=\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6}=338350$$

$$(ii)\ m=1\cdot 100+2.99+3.98+\cdots+100\cdot 1=\sum_{k=1}^{100}k(101-k)$$

$$=101\sum_{k=1}^{100}k-\sum_{k=1}^{100}k^2=101\times\frac{100\times 101}{2}-338350=171700$$

因此$n<2m$

2. 設$<a_k>_{k=1}^{100}$，$<b_k>_{k=1}^{100}$，$<c_k>_{k=1}^{100}$，$<d_k>_{k=1}^{100}$爲任意四個〝由 1 到 100〞等 100 個正整數任意重排的四個數列，則由〝排序不等式〞知

$m\leq\sum_{i=1}^{100}a_ib_i\leq n<2m\leq 2\sum_{i=1}^{100}c_id_i$，因此不存在四個數列$<a_k>_{k=1}^{100}$，$<b_k>_{k=1}^{100}$

，$\langle c_k \rangle_{k=1}^{100}$，$\langle d_k \rangle_{k=1}^{100}$，使 $\sum_{k=1}^{100} a_k b_k = 2\sum_{k=1}^{100} c_k d_k$。

《解題重點》

1. 求級數總和 $\sum_{k=1}^{100} k^2$ 與 $\sum_{k=1}^{100} k(101-k)$。
2. 排序不等式。

《評析》

1. 本題配合提示〝排序不等式〞之課外題材而設計，引導學生尋找課外讀物增進解題知識爲主要目標，徵答人數也不少，計有武陵高中鍾隆興等96人，得分率0.96最高。答題品質較佳者計有建中黃致遠、戴松青、鍾至衡等三人。
2. 回答這道題的同學都會引用排序不等式解決。嘉中蔡明宏用反證法解題，配合不等式討論解法亦稱完整。

問題編號
1024

設 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$，爲 n 個實數，它們滿足下列 n 個關係：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > 0，\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j > 0，\sum_{1\le i<j<k\le n} a_i a_j a_k > 0, \cdots, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n > 0$$

(1)證明：當 $n=3$ 時，a_1, a_2, a_3 均大於0。

(2)當 $n>3$ 時，請確定是否每個 a_i 均大於0？其中 $i=1, 2, 3, \ldots, n$。

解答：(1)當 $n=3$ 時，由題設得

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3>0 \cdots\cdots\cdots\cdots (一) \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3>0 \quad \cdots (二) \\ a_1a_2a_3>0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (三) \end{cases}$$

不失一般性，可設 $a_1 \ge a_2 \ge a_3$

(i) 如果 $a_3=0$ 則 $a_1a_2a_3=0$ 與(三)矛盾

(ii) 如果 $a_3<0$ 則由(三)可得 $a_1a_2<0$

再由(二)得 $(a_1+a_2)a_3 > -a_1a_2 > 0$，但 $a_3<0$，

所以 $(a_1+a_2)<0$，因此 $a_1+a_2+a_3<0$ 與(一)矛盾

由 (i)，(ii) 的討論，可知 $a_3>0$，也就是 a_1、a_2、a_3 均大於0

(2)當 $n>3$ 時，由(1)的方式，我們很難處理這問題，下列我們考慮多項函數 $f(x)$：

令$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)$

$$=x^n-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)x^{n-1}+\left(\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j\right)x^{n-2}-\left(\sum_{1\le i<j<k\le n}a_ia_ja_k\right)x^{n-3}$$

$$+\cdots+(-1)^n(a_1a_2a_3\cdots a_n)\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

因爲$(*)$式爲對稱形式，不妨設$a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots\ge a_n$

(i)如果$a_n=0$，則$a_1a_2a_3\cdots a_n=0$與已知矛盾。

(ii)如果$a_n<0$，則由①知$f(a_n)=0\cdots\cdots\cdots\cdots②$

且$f(a_n)=a_n{}^n-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)a_n{}^{n-1}+\left(\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j\right)a_n{}^{n-2}-\left(\sum_{1\le i<j<k\le n}a_ia_ja_k\right)a_n{}^{n-3}$

$$+\cdots+(-1)^n(a_1a_2a_3\cdots a_n)\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

當n爲偶數時，③式中〝等號〞右邊各項均爲正數，

所以$f(a_n)>0$與②矛盾

當n爲奇數時，③式中〝等號〞右邊各項均爲負數，

所以$f(a_n)<0$與②矛盾

由此分析，可知(i)，(ii)均不可能成立，所以$a_n>0$。

因此$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$均爲正數。

結論：當$n>3$時，每個a_i，$i=1, 2, 3, \ldots, n$也都大於 0 。

《解題重點》

1. 本問題中的條件$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$的關係爲對稱形式，所以可以將$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$排序討論。
2. 窮舉法（亦可用反證法），分析討論(1)中的不等式。
3. 當$n>3$時，利用根與係數的關係引入一多項函數$f(x)$，藉著$f(x)$在$x=a_i$的函數值與〝指數〞的奇偶性，討論$f(a_i)$的函數值正負性質，分析a_k不可能爲負數。

《評析》

1. 本題配合高一基礎數學第一冊第五章多項式與第二冊第一章指數題材設計，統整性較高，在這五題中，本題徵答人數最少，計有台南一中劉育廷等 81 人，得分率 0.76 也是最低，建中李國禎、陳奕瑋、張智明三位的答題品質很好。
2. 有部分同學直接用通式證法，再說$n=3$時也成立。
3. 有部分同學兩部分證明，用相同的方法證明，但是沒有將兩部分合併通式證

明，可以說技巧需加強。

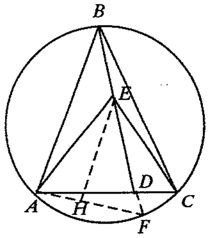
4. 有部分同學用歸納法證明，但條件錯誤，所以證明無效。祇有雄中林耕賢用歸納法證，討論分析正確。

問題編號 1025

等腰三角形ABC中，$\overline{BA}=\overline{BC}$。$D$在$\overline{AC}$邊上，（$D$介於$A$，$C$之間）使$\overline{AD}=2\overline{DC}$，且$E$在$\overline{BD}$線上（$E$介於$B$，$D$之間），使$\angle BAE=\angle EBC$，證明：$\angle CED=\frac{1}{2}\angle ABC$。

解答：

解法㈠：1. 如左圖，作$\triangle ABC$的外接圓，並延長$\overline{BD}$使它與圓相交，令交點為F，連接$\overline{AF}$, $\overline{CF}$。



2. 已知$\overline{BA}=\overline{BC}$，所以$\angle BFA=\angle BFC=\angle BAC=\angle BCA$，又已知$\angle BAE=\angle EBC$，且$\angle EBC=\angle FAC$，所以$\angle EAF=\angle EFA$，即$\triangle AEF$為等腰三角形。

3. 過E點作$\overline{AF}$的垂線，垂足為H，則H為$\overline{AF}$線段中點，且$\overline{EH}$平分$\angle AEF$。

4. 由⑵知$\overline{FB}$平分$\angle AFC$，所以$\triangle AFC$中，$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AF}:\overline{FC}$（內角分角線性質），因此$\overline{AF}=2\overline{FC}$，即$\overline{FH}=\overline{FC}$，

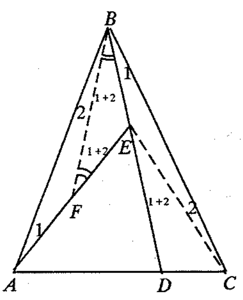
又$\overline{EF}=\overline{EF}$，$\triangle HEF\cong\triangle CEF$（ .A. 性質）。

5. $\angle CED=\angle HEF=\frac{1}{2}\angle AEF$（全等性質）。

6. $\triangle ABC$與$\triangle AEF$同為等腰三角形且$\angle BAC=\angle EAF$，所以$\angle ABC=\angle AEF$。

7. 由⑸，⑹的關係得到$\angle CED=\frac{1}{2}\angle ABC$。

解法㈡：（面積法）（建中張智明等之作法）：



1. 面積比 $\triangle ABE$： $\triangle BEC=AD:CD=2:1$

$\Rightarrow$ $\triangle ABE=2s\triangle BEC$

$\Rightarrow AB\cdot AE=2BC\cdot BE$

$\Rightarrow$ $AE=2BE$（$\because AB=BC$）

2. 取$\overline{AE}$的中點F，連$\overline{BF}$則

$\triangle ABF\cong\triangle BCE$　（$\because AF=\frac{1}{2}AE=BE, \angle BAF=\angle EBC, AB=BC$）

$\therefore \angle ABF=\angle BCE=\angle 2$　　（$\angle BAF=\angle EBC=\angle 1$）

3. $\triangle BEF$ 是等腰 $\triangle$ $(EF = EB)$

$\therefore \angle EBF = \angle EFB = \angle 1 + \angle 2$ （外角定理）

4. $\angle CED = \angle EBC + \angle ECB$ （$\triangle$外角定理）

$= \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ABC$

《解題重點》

1. 等弦對等圓周角性質。
2. 等腰三角形高的性質。
3. 角平分線的基本性質。
4. 三角形面積比的基本性質。
5. 三角形外角定理。

《評析》

1. 本題配合國中綜合幾何題材設計，徵答人數不如預期的多，可能跟本題排在第五題有關，計有嘉中蘇冠武等91人；得分率0.97最高，答題品質亦佳，計有建中陳奕瑋、鄧敦民、林洺弘、張智明、張仲景，台師大附中王世豪，嘉中蔡明宏、李建帆等八位答題品質頗佳。
2. 此道幾何題，證法甚多。除綜合幾何外，也有引入三角函數，嘉中蔡明宏，台師大附中王世豪，…很多同學證法都不錯。嘉中黃柏凱引用〝複數幾何〞證明；三角函數運算要非常成熟，才能證完整。
3. 幾何證明題，作法通常是多樣的，每一種方法都是同學苦思後的結晶，值得鼓勵，解法㈡的這種證法是這次徵答者多數人所採用的。

評註：

1. 本次徵答統計簡表如下：

	問題編號	1021	1022	1023	1024	1025
總人數168人	得分	1061	758	639	427	608
	徵答人數	160	120	95	80	90
	得分率	0.95	0.90	0.96	0.76	0.97
一年級107人	得分	668	525	417	253	441
	徵答人數	101	80	62	53	64
	得分率	0.94	0.94	0.96	0.68	0.98

二年級51人	得分	323	171	152	112	105
	徵答人數	49	30	23	18	16
	得分率	0.94	0.81	0.94	0.89	0.94
三年級10人	得分	70	62	70	62	62
	徵答人數	10	10	10	9	10
	得分率	1.00	0.89	1.00	0.98	0.89
參與徵答總校數：22所 計： 計畫內：13所，非計畫內：9所						

2. 本期徵答題目難度適宜，徵答人數跟第一、三兩期（1001～1005；1011～1015）相近，高一學生徵答人數較多的學校計有建中、武陵高中、嘉中、台南一中、台南女中等五所高中。

3. 嘉縣大林國中游智深同學回答了1021, 1022, 1024等三題，批閱結果顯示該生代數能力甚佳，書寫品質頗佳。

4. 本期徵答題較多得分總分較優異的學生計有：

高一：建中李國楨、陳奕瑋、蔡旭程、鄧敦民；武陵高中鍾隆興、黃世昌、游志強；台中一中林宗茂；嘉中林柏志、蘇冠武；台南一中王堯生、劉育廷、王泓民、陳盈元、謝忠佑、廖翊廷；雄中林耕賢、王紹宇、盧佑群；豐原高中葉建宏等二十一人。

高二：台師大附中王世豪、陳正傑、陳冠宏；武陵高中胡台威、蔣家勛、劉鴻傑；彰化高中郭浚燊、唐嘉宏；嘉中蔡明宏、黃柏凱、莊雲欽、蘇泓洸等十二人。

高三：建中余家偉、王昭仁、郭文雄、陳俊豪；武陵高中彭彥碩；鳳山高中林武雄；聖功女中黃佳慧；協同高中蔡宗承等八人。

5. 學生作答之心得感言摘錄：

①這次的題目雖然較簡單，但仍令我花費了一番功夫才解出來。除了1021是建立信心之外，其餘四題皆須花一點時間，尤其是1024與1025，1024中，剛開始還不知道如何著手，在經過了一番挫折，才想到了轉換爲方程式之根來證明；至於1025，更不用說了，乍看之下似乎很簡單，但一深入思考，就好像走進迷宮，幸好最後找到了出口，不然眞的令人不知如何是好。不過這次的題目比前幾次的題目容易進入狀況，使得我對數學的興趣也愈來愈濃厚了。（雄中，盧佑群）

②・就本題（1021）而言，似乎只是高一時所學數列的應用而已，難度並不高，我想程度好的國中生，應該也可以順利解出吧！

・這次看到徵答題的時間，幾乎快要到截止日期，才寫了一題，太可惜了！

・我想數學的精神—〝思考〞，幾乎可以在徵答題中表露無遺，而徵答題的存在，也可說是為了今日中學的數學教育，注入了一流活水。（建中，林繼偉）

評注：常常思考，不但可以靈活思路，又可以獲得許多〝知識〞，一舉數得。

③第1023題本來應該是困難的，可是因為提示了排序不等式，所以這題就變得實在是太簡單了！（建中，鄧敦民）

④為了解這些問題，我花了一些時間想，雖然有些問題最後還是沒有滿意的答案，但卻讓我正真處於「思考」的狀態，這種狀態是我平時少有的。（精誠中學，何彥廷）

評注：你用心解答問題，對數學的學習一定有幫助，雖然剛開始花了很多時間，但培養思考的習慣是值得的，繼續努力吧。

⑤第1025題好不容易全部解開了，花費了整個上午，不過卻不失一分樂趣，也許學數學最大樂趣就是求得想很久的問題答案吧！（豐原高中，葉建宏）

⑥第1025題是我和另一個同學想出來的，他原本是延長$\overline{ED}$至F使$\overline{EF}=\overline{EA}$，則他利用面積的方法（我不知道是什麼方法）得到$\angle ECF=90^\circ$然後就沒有做下去了。我就接著想到利用外接圓,利用一連串的轉換而得證。我是因為他找到的特徵而找到了一個靈感。（建中，黃柏豪）

評注：「全力以赴」是學〝科學〞的特質。

⑦寫了快半年的挑戰題了，雖然總是有些題目想不出來，不過，我覺得這半年來挑戰題對我解題的方向有很大的幫助，我想只要我再好好做下去，一定會有很大的進步的。（北一女，葉書蘋）

☆