三線性坐標與面積坐標(二)

趙文敏

國立台灣師範大學數學系

定理4（將直角坐標化為三線性坐標、面積坐標）

在直角坐標平面上，設參考三角形$\triangle A_1A_2A_3$的三頂點坐標分別為$A_1(x_1, y_1)$、$A_2(x_2,y_2)$與$A_3(x_3,y_3)$。

⑴若點P的直角坐標為(x,y)，則點P對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標為

$$\left(\begin{vmatrix} x_2-x & x_3-x \\ y_2-y & y_3-y \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3-x & x_1-x \\ y_3-y & y_1-y \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1-x & x_2-x \\ y_1-y & y_2-y \end{vmatrix}\right)。$$

⑵若點P的直角坐標為(x,y)，則點P對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標為

$$\left(\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} x_2-x & x_3-x \\ y_2-y & y_3-y \end{vmatrix} : \frac{1}{a_2}\begin{vmatrix} x_3-x & x_1-x \\ y_3-y & y_1-y \end{vmatrix} : \frac{1}{a_3}\begin{vmatrix} x_1-x & x_2-x \\ y_1-y & y_2-y \end{vmatrix}\right)。$$

證：由定理3解方程式即得。‖

根據定理3與定理4，若有序三實數組(μ_1,μ_2,μ_3)滿足$\mu_1+\mu_2+\mu_3\neq 0$，則$\triangle A_1A_2A_3$平面上必有唯一的一個點P，使得$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$是點P對$\triangle A_1A_2A_3$的一組面積坐標，對於三線性坐標，也有類似的結論。

乙、分點坐標

利用定理3與定理4的坐標變換公式，我們可以利用直角坐標系的一些性質，來推導出三線性坐標系與面積坐標系中的相對性質。

定理5（*Joachimsthal*分點公式）

設點P、Q與$\triangle A_1A_2A_3$在同一平面上，點R在直線PQ上，$R\neq Q$且有向分比$[PQ/R]=r$，亦即：向量PR與RQ滿足$PR=rRQ$，且$r\neq -1$。

⑴若點P與點Q對$\triangle A_1A_2A_3$的規範化面積坐標分別為$P(p_1:p_2:p_3)$與$Q(q_1:q_2:q_3)$，則點R對$\triangle A_1A_2A_3$的規範化面積坐標為

$$R\left(\frac{p_1+rq_1}{1+r} : \frac{p_2+rq_2}{1+r} : \frac{p_3+rq_3}{1+r}\right)。$$

⑵若點P與點Q對$\triangle A_1A_2A_3$的規範化三線性坐標分別為$P(p_1:p_2:p_3)$與$Q(q_1:q_2:q_3)$，

則點R對$\triangle A_1A_2A_3$的規範化三線性坐標爲

$$R\left(\frac{p_1+rq_1}{1+r}:\frac{p_2+rq_2}{1+r}:\frac{p_3+rq_3}{1+r}\right)。$$

證：在平面上任選一直角坐標系，設參考三角形的三頂點的直角坐標分別爲$A_1(x_1,y_1)$、$A_2(x_2,y_2)$與$A_3(x_3,y_3)$。

(1)因爲點P與Q對$\triangle A_1A_2A_3$的規範化面積坐標分別爲$P(p_1:p_2:p_3)$與$Q(q_1:q_2:q_3)$，則$p_1+p_2+p_3=1$，$q_1+q_2+q_3=1$，而且依定理3(1)，點P與Q的直角坐標分別爲

$$P(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3,\ p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3),$$
$$Q(q_1x_1+q_2x_2+q_3x_3,\ q_1y_1+q_2y_2+q_3y_3)。$$

設點R對$\triangle A_1A_2A_3$的規範化面積坐標爲$(\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3)$，則$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$，而且$R$的直角坐標爲$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3)$。因爲$PR=rRQ$，所以，依直角坐標系的分點公式，可知點$R$的直角坐標爲

$$R=\left(\frac{1+r}{(p_1+rq_1)x_1+(p_2+rq_2)x_2+(p_3+rq_3)x_3},\right.$$
$$\left.\frac{(p_1+rq_1)y_1+(p_2+rq_2)y_2+(p_3+rq_3)y_3}{1+r}\right)。$$

比較點R的直角坐標的兩種表示法，即得

$$\begin{cases} x_1\left(\lambda_1-\frac{p_1+rq_1}{1+r}\right)+x_2\left(\lambda_2-\frac{p_2+rq_2}{1+r}\right)+x_3\left(\lambda_3-\frac{p_3+rq_3}{1+r}\right)=0 \\ y_1\left(\lambda_1-\frac{p_1+rq_1}{1+r}\right)+y_2\left(\lambda_2-\frac{p_2+rq_2}{1+r}\right)+y_3\left(\lambda_3-\frac{p_3+rq_3}{1+r}\right)=0 \\ \left(\lambda_1-\frac{p_1+rq_1}{1+r}\right)+\left(\lambda_2-\frac{p_2+rq_2}{1+r}\right)+\left(\lambda_3-\frac{p_3+rq_3}{1+r}\right)=0。\end{cases}$$

因爲點$A_1(x_1,y_1)$、$A_2(x_2,y_2)$與$A_3(x_3,y_3)$不共線，所以，上述方程組的係數不等於0。於是，得

$$\lambda_1-\frac{p_1+rq_1}{1+r}=\lambda_2-\frac{p_2+rq_2}{1+r}=\lambda_3-\frac{p_3+rq_3}{1+r}=0。$$

這就是欲證的結果。

(2)依前面的(1)及定理1立即可得。‖

請注意：定理5中的分點坐標公式必須是規範化坐標才成立 。 例如：若頂點A_2與A_3分別使用面積坐標$A_2(0:1:0)$與$A_3(0:0:2)$，則當$r=1$時，所得的坐標爲$(0:1/2:1)$，此點不是$\overline{A_2A_3}$的中點，而有向分比爲1所對應的分點應是中點。

定理6（三點共線的條件）

設點P、Q、R是與$\triangle A_1A_2A_3$在同一平面上的三個相異點。

(1)若點P、Q與R對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$P(p_1:p_2:p_3)$,$Q(q_1:q_2:q_3)$與$R(r_1:r_2:r_3)$，則P、Q與R共線的充要條件是

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}=0。$$

(2)若點P、Q與R對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標分別爲$P(p_1:p_2:p_3)$、$Q(q_1:q_2:q_3)$與$R(r_1:r_2:r_3)$，則P、Q與R共線的充要條件是

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}=0。$$

證：在平面上任選一直角坐標系，設參考三角形的三頂點的直角坐標分別爲$A_1(x_1,y_1)$、$A_2(x_2,y_2)$與$A_3(x_3,y_3)$。

(1)將點P、Q與R依定理3(1)以直角坐標表示。因爲依行列式的加法，可得

$$\begin{vmatrix} \dfrac{p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3}{p_1+p_2+p_3} & \dfrac{p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3}{p_1+p_2+p_3} & 1 \\ \dfrac{q_1x_1+q_2x_2+q_3x_3}{q_1+q_2+q_3} & \dfrac{q_1y_1+q_2y_2+q_3y_3}{q_1+q_2+q_3} & 1 \\ \dfrac{r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3}{r_1+r_2+r_3} & \dfrac{r_1y_1+r_2y_2+r_3y_3}{r_1+r_2+r_3} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)+(x_1y_2-x_2y_1)}{(p_1+p_2+p_3)(q_1+q_2+q_3)(r_1+r_2+r_3)}\cdot\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix},$$

而由$A_1(x_1,y_1)$、$A_2(x_2,y_2)$與$A_3(x_3,y_3)$不共線可得$(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)+(x_1y_2-x_2y_1)\neq 0$，所以，可得

點P、Q、R共線

$\Leftrightarrow$上式左端由直角坐標所成的行列式值等於0

$\Leftrightarrow$上式右端由面積坐標所成的行列式值等於0。

這就是所欲證的結果。

(2)依前面的(1)及定 理1立即可得。‖

下面是三點共線的一些實例，其中有些是有關三角形的幾何中的重要性質。讀者可從其中發現三線性坐標與面積坐標的方便有用。

例3 (*Euler*線)

三角形的重心G、外心O與垂心H必共線，且向量$\overrightarrow{GH}$與$\overrightarrow{GO}$滿足$\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}$，亦即：$G$介於$H$與$O$之間且$\overline{GH}=2\overline{GO}$（參看圖3）。重心$G$、外心$O$與垂心$H$所共的直線稱為三角形的*Euler*線。

證：設本例中的三角形記為$\triangle A_1A_2A_3$，其三邊長分別為a_1、a_2與a_3。依例2，外心O、垂心H與重心G對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標可分別表為$O(\sin2\alpha_1:\sin2\alpha_2:\sin2\alpha_3)$、$H(\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3:\sin\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_1:\sin\alpha_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2)$與$G(1:1:1)$。因為

$$
\begin{aligned}
&2\cdot\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\sin2\alpha_1\\
&\quad=2\sin\alpha_1(\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\cos(\alpha_2+\alpha_3))\\
&\quad=2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3,
\end{aligned}
$$

而且同理可得$2\cdot\sin\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_1+\sin2\alpha_2=2\cdot\sin\alpha_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\sin2\alpha_3=2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3$，所以，可得

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1\\
\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 & \sin\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_1 & \sin\alpha_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2\\
\sin2\alpha_1 & \sin2\alpha_2 & \sin2\alpha_3
\end{vmatrix}=0。
$$

依定理6(1)，可知G、H與O共線。

其次，因為$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$，所以，

$$
\begin{aligned}
&\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\sin\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_1+\sin\alpha_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2\\
&\quad=\cos\alpha_3\sin(\alpha_1+\alpha_2)+\sin\alpha_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2\\
&\quad=\sin\alpha_3(-\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos\alpha_1\cos\alpha_2)
\end{aligned}
$$

$=\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3$,

$\sin 2\alpha_1+\sin 2\alpha_2+\sin 2\alpha_3$

$=2\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)-2\sin\alpha_3\cos(\alpha_1+\alpha_2)$

$=4\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3$,

所以，G、H與O的規範化面積坐標分別爲$G(1/3:1/3:1/3)$，

$H(\cos\alpha_2\cos\alpha_3/\sin\alpha_2\sin\alpha_3:\cos\alpha_3\cos\alpha_1/\sin\alpha_3\sin\alpha_1:\cos\alpha_1\cos\alpha_2/\sin\alpha_1\sin\alpha_2)$與

$O(\cos\alpha_1/2\sin\alpha_2\sin\alpha_3:\cos\alpha_2/2\sin\alpha_3\sin\alpha_1:\cos\alpha_3/2\sin\alpha_1\sin\alpha_2)$。因爲

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\cos\alpha_2\cos\alpha_3}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{\cos\alpha_1}{2\sin\alpha_2\sin\alpha_3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\cos(\alpha_2+\alpha_3)}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}\right)$$
$$=\frac{1}{3},$$

而且同理可得第二與第三坐標的類似等式，所以，依定理5⑴可知有向分比$[HO/\ G]=2$，亦即：$\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GO}$。‖

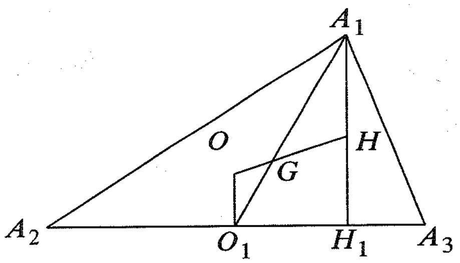

圖3

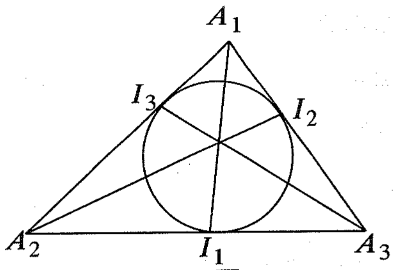

圖4

例4(*Gergonne*點)

設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形。若$\triangle A_1A_2A_3$的內切圓與三邊$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$、$\overline{A_1A_2}$分別切於點I_1、I_2、I_3，則$\overline{A_1I_1}$、$\overline{A_2I_2}$與$\overline{A_3I_3}$共點(參看圖4)。此點稱爲$\triangle A_1A_2A_3$的*Gergonne*點，它對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$((s-a_1)^{-1}:(s-a_2)^{-1}:(s-a_3)^{-1})$。

證：讀者仿下面例5自證之。‖

例5(*Nagel*點)

設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形。若$\triangle A_1A_2A_3$的三個傍切圓與三邊$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$、$\overline{A_1A_2}$分別切於點J_1^1、J_2^2、J_3^3，則$\overline{A_1J_1^1}$、$\overline{A_2J_2^2}$、$\overline{A_3J_3^3}$共點(參看圖5)。此點稱爲$\triangle A_1A_2A_3$的*Nagel*點，它對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$(s-a_1:s-a_2:s-a_3)$。*Nagel*點的另一性質是：$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2J_1^1}=\overline{A_1A_3}+\overline{A_3J_1^1}=\overline{A_2A_1}+\overline{A_1J_2^2}=\overline{A_2A_3}+\overline{A_3J_2^2}=\overline{A_3A_1}+\overline{A_1J_3^3}=\overline{A_3A_2}+\overline{A_2J_3^3}=s$。

證：依例2，點J_1^1、J_2^2、J_3^3對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$J_1^1(0:s-a_2:s-a_3)$、$J_2^2(s-a_1:0:s-a_3)$、$J_3^3(s-a_1:s-a_2:0)$。設$\overline{A_2J_2^2}$與$\overline{A_3J_3^3}$交於點N，而且N對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$N(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，則依定理6(1)，可得

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ s-a_1 & 0 & s-a_3 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ s-a_1 & s-a_2 & 0 \end{vmatrix}=0。$$

亦即：$\mu_1(s-a_3)-\mu_3(s-a_1)=0$、$\mu_1(s-a_2)-\mu_2(s-a_1)=0$。由此解得

$$\mu_1:\mu_2:\mu_3=(s-a_1):(s-a_2):(s-a_3)。$$

換言之，點N對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$N(s-a_1:s-a_2:s-a_3)$。因爲

$$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & s-a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-a_2 & s-a_3 \end{vmatrix}=0,$$

所以，點N、A_1、J_1^1共線。由此知：$\overline{A_1J_1^1}$、$\overline{A_2J_2^2}$、$\overline{A_3J_3^3}$共點。‖

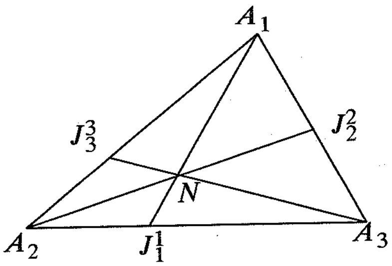

圖5

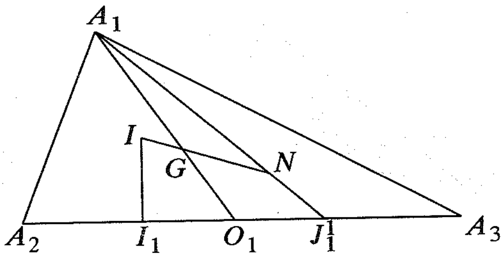

圖6

例6：三角形的重心G、內心I與*Nagel*點共線，而且向量GN與GI滿足$GN=-2GI$，亦即：G介於I與N之間且$\overline{GN}=2\overline{GI}$（參看圖6）。

證：設本例中的三角形記爲$\triangle A_1A_2A_3$，其三邊長分別爲a_1、a_2與a_3。依例2及5，重心G、內心I與*Nagel*點N對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標可分別表示爲$G(1:1:1)$、$I(a_1:a_2:a_3)$與$N(s-a_1:s-a_2:s-a_3)$。因爲

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ s-a_1 & s-a_2 & s-a_3 \end{vmatrix}=0,$$

所以，依定理6(1)，點G、I與N共線。

其次，因爲$a_1+a_2+a_3=2s$且$(s-a_1)+(s-a_2)+(s-a_3)=s$，所以，$G$、$I$與$N$的規範化面積坐標分別爲$G(1/3:1/3:1/3)$、$I(a_1/(2s):a_2/(2s):a_3/(2s))$與$N((s-a_1)/s:(s-a_2)/s:(s-a_3)/s)$。因爲

$$\frac{1}{3}\left(\frac{s-a_1}{s}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{2s}\right)=\frac{1}{3},$$

而且同理可得第二與第三坐標的類似等式，所以，依定理5(1), 可知有向分比 $[NI/\ G]=2$，亦即：$\overrightarrow{NG}=2\overrightarrow{GI}$。‖

例7：設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形。若$\triangle A_1A_2A_3$的一傍切圓J^1與三直線A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2分別切於點J_1^1、J_2^1、J_3^1，則直線$A_1J_1^1$、$A_2J_2^1$、$A_3J_3^1$共點（參看圖7）。對於傍切圓J^2與J^3，也有類似的結果。

證：因爲點J_1^1、J_2^1、J_3^1對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$J_1^1(0:s-a_2:s-a_3)$、$J_2^1(-(s-a_2):0:s)$、$J_3^1(-(s-a_3):s:0)$，所以，仿例5的證法可知三直線$A_1J_1^1$、$A_2J_2^1$、$A_3J_3^1$共點，其交點對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$(-s^{-1}(s-a_2)(s-a_3):s-a_2:s-a_3)$。請注意：$-s^{-1}(s-a_2)(s-a_3)+(s-a_2)+(s-a_3)\neq 0$。‖

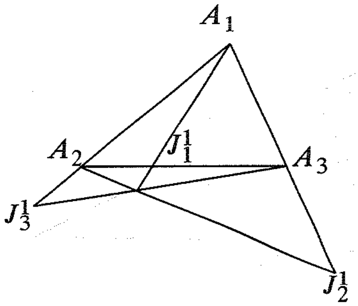

圖7

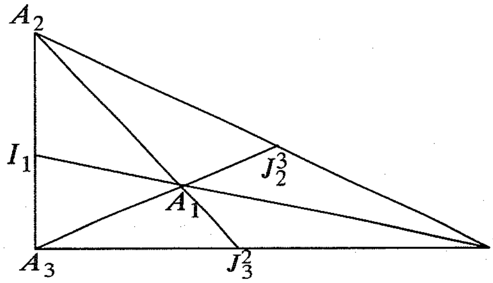

圖8

例8：設$\triangle A_1A_2A_3$的內切圓I與$\overline{A_2A_3}$切於點I_1、傍切圓J^3與直線A_3A_1切於點J_2^3、傍切圓J^2與直線A_1A_2切於點J_3^2，則直線A_1I_1、$A_2J_2^3$與$A_3J_3^2$共點（參看圖8）。將足碼1、2與3輪換，可得另外兩組共點的直線。

證：因爲點I_1、J_2^3、J_3^2對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$I_1(0:s-a_3:s-a_2)$、$J_2^3(s:0:-(s-a_2))$、$J_3^2(s:-(s-a_3):0)$，所以，仿例5的證法可知三直線A_1I_1、$A_2J_2^3$、$A_3J_3^2$共點，其交點對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$(-s(s-a_2)^{-1}(s-a_3)^{-1}:(s-a_2)^{-1}:(s-a_3)^{-1})$。請注意：$-s(s-a_2)^{-1}(s-a_3)^{-1}+(s-a_2)^{-1}+(s-a_3)^{-1}\neq 0$。‖

例9（*Menelaus* 定理）

設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，而點B_1、B_2與B_3分別在直線A_2A_3、A_3A_1與A_1A_2

上，但都不是$\triangle A_1A_2A_3$的頂點。若$[A_2A_3/B_1]=r_1$、$[A_3A_1/B_2]=r_2$且$[A_1A_2/B_3]=r_3$，則三點B_1、B_2與B_3共線的充要條件是$r_1r_2r_3=-1$。

證：依假定，點B_1、B_2與B_3對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$B_1(0:1:r_1)$、$B_2(r_2:0:1)$與$B_3(1:r_3:0)$。因此，依定理6(1)，點B_1、B_2與B_3共線的充要條件爲

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & r_1 \\ r_2 & 0 & 1 \\ 1 & r_3 & 0 \end{vmatrix}=0，即r_1r_2r_3+1=0。 \|$$

例10（*Ceva*定理）

設$\triangle A_1A_2A_3$爲任意三角形，而點B_1、B_2與B_3分別在直線A_2A_3、A_3A_1與A_1A_2上，但都不是$\triangle A_1A_2A_3$的頂點。若$[A_2A_3/B_1]=r_1$、$[A_3A_1/B_2]=r_2$且$[A_1A_2/B_3]=r_3$，則直線A_1B_1、A_2B_2與A_3B_3共點的充要條件是：$r_1r_2r_3=1$而且三直線中至少有兩條直線相交。

證：設直線A_2B_2與A_3B_3相交於一點P。因爲點B_1、B_2與B_3對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標分別爲$B_1(0:1:r_1)$、$B_2(r_2:0:1)$與$B_3(1:r_3:0)$，所以，仿例5的方法，可知點P對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標爲$P(r_2:r_2r_3:1)$。於是，得

直線A_1B_1、A_2B_2與A_3B_3共點

$\Leftrightarrow$點A_1、B_1與P共線

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_2r_3 & 1 \end{vmatrix}=0，即r_1r_2r_3-1=0。 \|$$

例4、例5、例7與例8的共點問題，都可以利用*Ceva*定理來證明。 ☆