

函數的一生

謝豐瑞* 陳材河#

* 國立臺灣師範大學數學系

國立臺灣師範大學附屬中學

函數這個數學概念，在我國，是學生從國中到大學都必須學習的，有許多學生覺得這個數學概念非常抽象，因而坊間有許多相關如何教函數的書籍，其目的不外乎提供給教師一些具體的教函數之法，以供教師參考選擇來幫助學生的學習；本文卻想從另一觀點切入，提供給教師一些不同的資源。什麼觀點呢？就是從教師素養的觀點，所以本文將提供一些數學史的資料，藉由對函數歷史的探討及相關數學家的介紹，期能提供教師對函數概念發展的知識，進而達到教函數之法的改進。

爲什麼要從數學史來切入呢？其好處頗多，但最大的好處莫過於使數學有生命，有前瞻性。

有生命的數學

學生從國中開始的學習經驗中，數學一直是一科死的知識，它沒有生命，只有對錯，數學課除了聽講以外，就是解題，對他們來說，數學是一科與人文毫無關連的科目，他們從沒想過，數學也是人創造出來的（以柏拉圖而言，是發現，而非創造），就像所有的文學一樣，都是人創造出來的，就像歷史一樣，是人類活動的歷程與產物的記錄；如果學生能對白居易的長恨歌欣賞不已，如果他們能對諸葛亮在赤壁之戰中展現的機智佩服不已，那麼爲什麼他們不能對尤拉提出的函數定義，或者是李善蘭創造的「函數」名稱投入感情呢？——因爲他們根本不知道有這回事——因爲我們從沒教他們去欣賞佩服過。

前瞻性的數學

數學的絕對性一直是它的一大優點，也是它的一大致命傷。這是從何說起呢？大家都知道，在考試的時候，數學向來是，對就是對，錯就是錯，沒有商量的餘地，即使到大學時，數學定義與定理也都是缺一條件不可，如果在計算題或證明題時老師針對各步驟的正確性而部分給分，那麼學生就會感謝這位又明理、又有人情味的老師。從這種角

度來看，學生認為改變已存在的數學內容，是不被允許的，而且是一種錯誤的行為。這種觀點豈不是使數學無法發展下去了嗎？其實，從數學史來看，數學的發展也是漸進的，前面的性質不斷的被修「改」，才有現在的性質產生，有時甚至要推翻前人的定義再自創一格，才能開拓數學的新天地，這些數學史的知識，教師實不可不知也，有了這些知識，教師方能以更正確的態度來引導學生的數學學習。

底下我們將分幾個方向來討論有關函數的知識：

函數名稱的由來

函數！它為什麼叫做「函數」呢？它到底有什麼重要性？它會是一種使學生望而生寒的數嗎？事實上，函數的觀念是一種很自然的觀念，它與人類生活經驗息息相關。懷德海曾對函數的重要性與自然性，提出了一個精闢的見解（李約瑟，民69），他認為人類早就有函數的觀念，因為，當一個有因果關係的現象其原因狀態發生變動時，任何人，對於其結果所產生的變化，不會不加以考察。也就是說，函數的概念是一種人們心中自然生成的概念。

在我國，可說沒有任何數學家對函數目前的定義有過貢獻，也沒有任何曾正式提出過函數這種概念。雖然函數的概念是很自然的概念且是很早就有的，但在中國，用「函數」這個名稱來代表這個數學概念，卻是很晚才出現的。有許多人批評這個名稱毫無意義且看起來不太自然，事實上那是因為他們不知道此名稱的源由。

1859年，「函數」一詞在我國誕生，是由清代數學家李善蘭和佛烈亞力在合譯的《代微積拾級》一書中提出的。該書共十八卷，是譯自美國數學家羅密士（*E.Loomis*）於1850年所著的《解析幾何與微積分初步》（*Elements of Analytical Geometry and Differential and Integral Calculus*）一書；此書代表高等數學第一次進入中國，書中有一個中英對照表，是由三百多個英文數學名詞及其中文譯名所構成的。在表中，有許多中國傳統數學中沒有的數學名詞，這些名詞一直被沿用至今，如：代數、常數、變數、已知數、未知數、函數、微分、積分、指數、級數、單項式、多項式、橫軸、縱橫等等（李儼，杜石然，民81）；而代數、微分、積分等名詞也為我們鄰國日本採用。從這些數學名詞術語所代表的數學概念來看，我們不得不讚嘆李氏的智慧高超，許多名詞術語譯得相當貼切傳神。

那麼「函數」到底譯得傳不傳神呢？且讓我們來看看李氏何把 *function*（意思是功能、機能）譯為「函數」，而不譯為「方數」（若音譯）、「機數」、「功數」（若意

譯) 或其他的名稱。李氏在代微積拾級書中翻譯函數一詞時，函數已具有現在的表徵形式與意義，他解釋函數的定義為：

「凡此變數中函彼變數，則此為彼之函數」

以現在的語言來說，意思是：如果在一個變數 y （此變數）的表達式子中包函另一個變數 x （彼變數），那麼 y 就是 x 的函數。李氏在該譯本序中說：「…代數以甲、乙、丙、丁諸元代已知數，以天、地、人、物諸元代變數。」並在文中舉例如下：若直線的式子是地=甲天 \perp 乙（ $y = Ax + B$ ），則地為天之函數。如果天和地的關係式不明顯，那麼可以只說地為天之因變數，寫成：地=函（天）來表示天和地的關係，這個式子相當於 $y = f(x)$ （凡異出版社，民76；中學數學教師手冊編寫組，1986）。

上面曾經提過，函數是很自然的，早就存在人們心中的，不像虛數、負數等數學概念，與人類的的生活經驗格格不入，以致在誕生後，仍有一段長時間被數學家視為棄嬰。雖然函數的觀念很容易被數學家接受承認，但把它映射到數學上，卻經歷了多次的轉變。在古代數學中函數的概念並沒有明顯的被表達出來，而且不是獨立研究的對象，它的雛形直到十七世紀才被視作一獨立概念。目前，大家普遍將函數看成是任意兩集合間的一種對應關係，這個定義，是於1887年，由Dedekind所提出的（科學出版社，1995）。而這期間，對函數概念的定形有貢獻的數學家有：*G. Galilei, R. Descartes, P. Fermat, I. Newton, G. Leibniz, J. Bernoulli, L. Euler, B. Bolzano, A. L. Cauchy, P. G. L. Dirichlet, R. Dedekind*等。

在上述的數學家中，有五人對函數定義的改變影響甚巨，依年代先後為：一、伽利略；二、萊布尼茲；三、白努力；四、尤拉；五、狄利克雷。下文除簡述各數學家對函數的貢獻外，並摘列出這些數學家較有趣的生平故事，值得我們與學生分享。有關函數概念的發展部分，其主要參考書包括：

1. *Howard Eves* 著的 *Great Moments in Mathematics*。歐陽降等譯為，《數學史上的里程碑》。
2. *Moris Kline* 著的 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Time*。林炎全等譯為《數學史—數學思想的發展》。
3. 梁宗巨著的《數學歷史典故》。
4. 科學出版社編的《數學百科全書》。
5. 舒湘芹等譯的《高觀點下的初等數學》。
6. 上海教育出版社編的《中學數學教師手冊》。

7. 凡異出版社出版的《世界數學簡史》。

有關數學家傳奇、趣史的主要參考書則有：

1. 吳文俊編的《世界著名數學家傳記》。
2. Howard Eves 著的 *An Introduction to History Mathematics*。歐陽降等譯為《數學史概論》。
3. 王懷權編著的《數學家發展史》。
4. 李信明著的《數學家傳奇》。
5. 高木貞治著，楊備欽，晨建韓譯的《近世數學史談》。

一、伽利略（Galileo Galilei，1564-1642，義大利人）

函數的發展

十七世紀起，從刻卜勒（*J. Kepler*，1571-1630，德國人）的行星運動定律到伽利略的落體運動、拋射運動及擺的運動研究裡，數學悄悄的從描述靜態的運動進入了描述動態的領域，因為數學多了一個極重要的觀念，它就是函數，在早期物理中的力學部分，伽利略在其 *Two New sciences* 裡，已經用到「比例」及文字的敘述來表示出函數的觀念。例如，「從靜止開始下落的等加速度運動，其距離與時間成比例」，「從等高的斜面上向下滑，則所需的時間與斜面長成比例」，這些敘述顯示出他已使用了變數及函數的概念，然而他並沒有將所發現的定律符號化。不過因為當時數學符號已普遍被使用，所以，前兩段敘述很快被寫成 $s = kt^2$ 及 $t = kl$ 。

伽利略所用的函數觀念是針對不同的問題去描述變數之間的關係，他並沒有將變數之間的關係抽象出來形成一個數學概念；直到1665年牛頓開始研究微積分後，牛頓才將任何變數之間所存在的關係，統一用 *Fluent* 這個字來表示。

生平事蹟

伽利略選擇在米開蘭基羅去逝的那天出生。在大學裡，他在點天花板上吊的大銅燈時，為了方便，常把燈拉到一邊後放開。這時銅燈就會來回擺動，振幅由大而小，他用脈博計時，發現振幅大小與擺動週期無關，後來又通過實驗證明了擺動週期也與擺錘重量無關，只和擺繩的長短有關。從這個問題引起了伽利略對科學和數學的興趣，因而於十七歲時放棄了醫學投身於數學與科學的研究。

二十五歲時，伽利略被聘為比薩大學的數學教授，在該大學任教期間，他當著一群學生、專家以及牧師的面前證明了大哲學家亞理士多德所說的「重物比輕物降落得快」

是錯誤的，因而得罪亞理士多德，也因此於二十七歲時被迫辭去比薩大學的教授職位，轉而至帕多瓦大學（*Padua U.*）任教。伽利略因為一直支持哥白尼「地球是繞著太陽轉」的理論而為耶穌會教士所不容，在帕多瓦十八年後，麥迪西（*Medici*）邀請他到弗羅倫斯（*Florence*）擔任首席宮庭數學家。這個職位，不但使他獲得了住所和高薪，更使他免於耶穌會教士的威脅。伽利略在弗羅倫斯的第一年即發現了木星的一個衛星，爲了報答麥迪西對他的恩情，他將此衛星命名爲麥迪西星。

伽利略是一個不折不扣的發明天才，常被稱爲現代發明之父。他用自己發明的望遠鏡證明了哥白尼提出的理論「地球是繞著太陽旋轉的」，因爲這個事件，他被判犯邪說罪而在遭軟禁，直至七十八歲那年，在軟禁中去逝。所幸牛頓選在這一年（西元1642）出生，這似乎意謂著世代交替，生生不息。伽利略晚年被軟禁著，不過真理永勝，樊諦岡的教皇終於在1980年宣布取消伽利略的邪說罪。

二、萊布尼茲（*Gottfried Wilhelm Leibniz*，1646-1716，德國人）

函數的發展

Function（函數）這個詞最早是由萊布尼茲引進數學中的。而其出現的年代則有幾種不同的說法。有人認爲它是出現在1673年或1692年萊布茲的手稿上；有人則說是1694年出現於萊布尼茲論文中。不論那一種說法，都肯定是於十七世紀後半，由萊布尼茲所第一次使用的。他當時以拉丁文*Functio*表示曲線上各點之間任何量的變化，如曲線上點的座標、曲線的斜率、曲半徑、切線、法線的長；其中曲線本身是由方程式提供，他也介紹了*constant*（常數）、*variable*（變數）及*parameter*（參數）等術語。西元1714年在*Historia*中，萊布尼茲以*function*表示因於一個自變數的量。

生平事蹟

萊布尼茲生於萊比錫，父親爲萊比錫大學道德哲學教授，萊布尼茲求學於萊比錫大學，在他20歲那年，該大學以其太年輕爲由，拒絕授予他法學博士。他憤而轉往紐輪堡附近的阿爾特多夫大學，取得該校的法學博士。在紐輪堡，他以一篇關於用歷史方法教授法學的傑出論文，被美因茨選帝候了許多知名數學家，如惠更斯（*Huygens*）及虎克（*Hooke*）等，也因此，他走上了研究數學之路。

萊布尼茲是個樂觀主義者，他認爲用他在創造二進制算術時的靈感，他有辦法讓整個中國信基督教。他提出用1代表上帝，用0代表無，上帝從0創造萬物，就像在二進

制中，任何數都可用 0 及 1 創造出來一樣。當時康熙皇帝非常重用葡萄牙傳教士閔明我（*Grimaldi*），於是萊布尼茲把他的這種想法，寫信告訴閔明我，希望能夠使中國皇帝信基督教，並從而使整個中國信基督教。結果當然是失敗了！除了在二進制方面的異想天開外，萊布尼茲也將數學的概念用神學來闡述，他提出：虛數就像基督教義裡的聖靈，介於存在與不存在之間。你覺得呢？

萊布尼茲在各方面均有極高的天份。以連續數學和離散數學這兩個廣闊而又相對的數學思想領域而言，有人說：萊布尼茲在這兩個領域都能算得上是達到了最高水準。可惜的是他一生的最後七年，一直困擾著於被懷疑剽竊牛頓微積分方面的成就。如今數學史研究者普遍承認牛頓與萊尼布茲獨立發現了微積分，只是牛頓發現在先，萊尼布茲發表較早。

三、白努力（*Johann Bernoulli*，1667-1748，瑞士人）

函數的發展

白努力於 1697 年或 1698 年從解析的角度，將函數擴充定義為：變數的函數，就是變數和常數以任何方式所構成的式子。這種定義，涵蓋了代數函數和超越函數。白努力並使用變數 x 或 ξ 來代表 x 的一般函數。這個改變，使函數的發展又跨前一步，進入了符號的表示方式。至 1718 年，他改用 ϕx 來表示函數。至此，函數的表示符號又與我們現在所使用的函數符號更接近了。

生平事蹟

白努力這個名字，在數學史中，真可說得上是一個響叮噠的名字。從十七世紀到十九世紀，白努力家族六代中，共出了十三個數學家。這些數學家名字（*First Name*）中有許多是重疊的，例如 *James = Jakob = Jacques; John = Johann = Jean*，所以常使我們搞不清楚在說的到底是哪一個白努力，在這兒所談到的是約翰白努力（*Johann Bernoulli*）。他是雅格布白努力（*Jakob Bernoulli*）的弟弟，27 歲那年獲醫學博士，可是在求學過程中卻對數學產生無比的興趣。他的父親期望他從事藥材的買賣事業，然而他卻拒絕了父親的期望，秘密的跟他哥哥學習數學。他們兄弟兩首先接觸到萊布尼茲有關微積分的簡略論述，在萊布尼茲思想的影響下，雙雙放棄早年本行，走上研究數學之路。雖然白努力兄弟相差十二歲，但在學術上之競爭互不相讓，產生爭端，萊布尼茲曾試圖調解，卻在調解的過程中造成雅格布白努力的誤會，認為萊布尼茲偏袒約翰白努力。約翰白努力在 26 歲那年開始與萊布尼茲通信討論數學問題，成為萊布尼茲忠實擁護者。以至於萊

布尼茲晚年與牛頓對於微積分優先權有爭議之時，他全力為萊布尼茲辯護。而與他有爭議的雅格布白努力則支持牛頓。

白努力在24歲時，在萊布尼茲所創辦的 *Acta Eruditorum* 發表解決懸鏈線問題之論文，他因這篇論文的發表，擠身一流數學家之列。1691-1692年間，也就是他24-25歲之間，開始傳授洛比達 (*L'Hospital*) 有關微積分的知識，同時寫了世界上第一本微積分教科書，但是並未發表。而第一本微積分課本 (*Analyse des infiniment petits*)，則是由他的學生洛比達於1696年出版的。據說這其間還有一段白努力不欲人所知的財物秘密，使得白努力將所發現的求不定式%極限值的方法，讓給洛比達，後來成為著名的洛比達法則 (*L' Hospital Rule*)。

白努力一生研究數學，有許多成就，但最值得一提的是他培養了許多數學家，其中還包括著名的數學家尤拉在內。

四、尤拉 (Leonhard Euler, 1707-1783, 瑞士人)

函數的發展

尤拉於1734年，以 $f(X)$ 為符號來表示函數，並在1748年於其著作《無窮分析論》卷I，第18頁中正式定義函數為：包含變量的函數是一個解析表達式，它是由這個變量和一些常量以任何方式組合的。他定義的解析表達方式如冪、對數、角函數等組成的每一個表達式為 x 的函數 y ，並且將指數函數表達為 $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ 、對數函數表達為 $\log x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ 。這時的函數定義不僅比最初的要廣，而且更加明確，但仍有其局限，例如，對於當變量之間的對應關係不能以解析式表達出來時，即不能稱之為具有函數關係，但並沒有明確指出允許什麼樣組合。

後來尤拉在1755年發表的《微分學》中擴充了這個定義為：如果某些變量以某一種方式依賴於另一些變量，即當後面這些變量變化時，前面這些變量也隨之變化，則將前面的變量稱為後面變量的函數。在《積分學》中(1768-1770)尤拉進一步的採用一種更廣泛的定義，即函數為在 xy 平面上隨手畫出來的曲線所表示的 y 與 x 關係。

生平事蹟

尤拉18歲開始其數學研究生涯，20歲受聘到聖彼得堡科學院後，將其一生的科學研究貢獻給俄國，再也沒有回到瑞士；但是他對祖國深厚的感情使他始終保留他瑞士的國籍。俄國之所以能成為海上強國，尤拉功不可沒，他在航海和船舶建造方面的貢獻尤其意義。

31歲那年，他右眼失明，但仍不減其對科學、生活、小孩的熱愛，59歲那年，一場疾病使他左眼也失明，但黑暗沒有使他停止工作，他一生著作有一半都在其失明後出版的。

尤拉是有史以來最多產的數學家，他的多產得益於非凡的記憶力與心算能力，例如，他可以背誦前一百個質數的一至六次方；除了寫書，終其一生，他以每年約800頁的速度發表極高深度的研究論文；他曾經答應死後留給聖彼得堡科學院足夠刊登二十年的論文。實際上，他留的論文直到1862年才出版完。他的多產，並不止於書籍或論文，尚包含小孩，他有過13個小孩，是數學家中最多產的。他也是新好男人的榜樣，關注家務及子女的教育，和子女玩科學遊戲、晚上陪讀聖經。

尤拉充沛的精力保持到一生的最後一刻。此點可由下面的一段敘述中看出。1783年9月18日下午，尤拉爲了慶祝他計算氣球上升定律的成功，請朋友們吃飯，那時天王星剛發現不久，尤拉寫出計算天王星軌道的要領，還和他的孫子逗笑，喝完茶後，突然疾病發作，胸部出血，煙斗從手中落下，口裡喃喃地說：「我死了。」尤拉終於停止了生命，也停止了計算。尤拉的愛國、尤拉的毅力與能力及尤拉對家庭的愛，實讓我們由衷的敬佩。

以尤拉命名的數學有尤拉定理、尤拉函數、尤拉數、尤拉線、尤拉角、尤拉圖、尤拉代換等。在數學史上，十八世紀人們稱爲「尤拉時代」，他與阿基米德、牛頓和高斯並列爲貢獻最大的四大數學家。

五、狄利克雷 (Dirichlet, P.G.L., 1805-1859, 德國人)

函數的發展

1829年，狄利克雷於《關於三角函數的斂散性》書中，將尤拉的第二定義改用分析語言表達：如果對於給定區間上每個 x 值有唯一確定的 y 值相對應，則 y 稱爲 x 的函數；他同時還指出：在整個區間上， y 是否按一種或多種規律依賴於 x ，是否可以用運算式表達，都是無關緊要的。在狄利克雷的函數定義中，對應關係既可以是解析表達式、圖象、表格、亦可以是口頭約定等。這就將函數概念從解析表達式的束縛中解脫出來。狄利克雷還提出著名的狄利克雷函數： $y = \begin{cases} 1, & \text{當 } x \text{ 爲有理數時;} \\ 0, & \text{當 } x \text{ 爲無理數時。} \end{cases}$ 然而狄利克雷之函數定義中的變數仍限制在數的範圍內。

生平事蹟

狄利克雷少年時即表現出對數學的深厚興趣，12歲前就自賺零用錢購買書籍，16

歲通過準考試後，父母希望他改讀法律，但是狄利克雷選定數學為終身職業。當時德國數學界除高斯一人外，普遍水準較低，於是狄利克雷就到集合了一批明星級數學家的巴黎就學。18歲時，他被選中擔任M.Fay將軍的小孩之家庭教師，當時M.Fay將軍擔任國民會議反對派領袖，狄氏因而結識法國知識界名流，包括他最尊敬的數學家富利葉，受其在三角級數和數學物理方面研究工作的影響甚巨。

狄利克雷一直對高斯 1801年出版的數學名著，《算術研究》極為心儀，即使旅途也隨身攜帶，形影不離。據說，1849年7月16日，高斯參加在哥廷根（*Cottingen*）為他舉行的獲得博士學位五十週年慶祝會，會進行到某一階段時，高斯準備用他《算術研究》中的一張原稿點煙，狄利克雷像見到有人犯瀆聖罪一般的吃了一驚，他匆忙從高斯手中搶下這一張原稿，一生珍藏這張紙。

當時還沒有其他數學家完全理解《算術研究》這部書，1863年狄利克雷的數論講義出版，這份講義不僅是對高斯《算術研究》的最好注釋，而且融入了他在數論方面很多的精心創造，成為數論經典之一。

1855年高斯去世，狄利克雷被選定繼任高斯在哥廷根的教職，53歲年那年瑞士葛特勒作紀念高斯的演講中突發心臟病，隔年春與世長辭。在數學上留有狄利克雷之名的有狄利克雷級數，狄利克雷原理，狄利克雷函數。

* * * * *

直到集合論出現後，函數的定義才改用集合的語句。1887年，R.Dedekind將函數定義為：如果對於集合M中每一個元素x，依某一種確定的對應規律f，集合N都有一個元素y與之對應，則稱y為x的函數。這一定義中集合未必是數集，突破變數是數的限制。而這個定義也正是目前被大家所使用的定義。

從上面的敘述可看出來，函數的發展是漸進的，變化的；它的「一生」走來，到現在，到底是少年？青年？壯年？還是老年？不管是什麼，最怕的是，它已經到了盡頭。

參考書目

- 凡異出版社，民76，世界數學簡史，pp.204-210，411-445，凡異出版社。
中學數學學教師手冊編寫組編，1986，中學數學教師手冊，上海教育出版社出版。
王懷權編著，民81，數學發展史，台灣商務文化事業公司。
李人言著，民72，中國算學史，台灣商務印書館。
李信明著，民85，數學家傳奇，九章出版社。

李約瑟著，傅溥譯，民69，中國之科學與文明（第四冊）pp.291-298，台灣商務印書館。

李儼、杜石然著，民81，中國古代數學簡史，九章出版社。

吳文俊主編，1995，世界著名數學家傳記，科學出版社。

科學出版社編，1995，數學百科全書（第二卷），科學出版社。

高木貞治著，楊備欽，晨建韓譯，民57，近世數學史談，pp.144-154，臺灣商務印書館。

舒湘芹等譯，民85，高觀點下的初等數學（第一卷），九章出版社。

梁宗巨著，民84，數學歷史典故，九章出版社。

梅榮照主編，1990，明清數學史論文集，江蘇教育出版社。

曹亮吉著，民85，阿草的葫蘆（上册），p.18-19，遠哲基金會。

Howard Eves 著，*Great Moments in Mathematics*。歐陽降等譯，1990，數學史上的里程碑，北京科學技術出版社。

Howard Eves 著，*An Introduction to History Mathematics*。歐陽降譯，1993，數學史概論，曉園出版社。

Moris Kline 著，*Mathematical Thought from Ancient to Moder Time*。林炎全等譯，民72，數學史—數學思想的發展，九章出版社。 ☆