# 1997年第9屆亞太數學奧林匹亞競賽
# 試題及參考解答

中華民國數學奧林匹亞委員會試題組提供

## 壹、一九九七年第九屆亞太數學奧林匹亞競賽中文試題

注意事項：

(1)時間分配：4小時。

(2)配分：每題7分，滿分35分。　　1997年3月15日

(3)不可使用計算器。　　比賽地點：台師大分部理學院中正堂

問題一：給定

$$S=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1993006}}$$

其中各項分母是三角數的倒數所形成之數列的部分和。證明：$S>1001$。

問題二：找一個正整數 $n$ 使得 $100\le n\le 1997$ 而且 $\frac{2^n+2}{n}$ 也是正整數。

問題三：設$\triangle ABC$內接於一個圓，且設

$$\ell_a=\frac{m_a}{M_a}，\ell_b=\frac{m_b}{M_b}，\ell_c=\frac{m_c}{M_c}，$$

其中$m_a, m_b, m_c$爲角平分線（在三角形內部）的長度，且$M_a, M_b, M_c$爲角平分線延長到圓相交處的長度。證明

$$\frac{\ell_a}{\sin^2 A}+\frac{\ell_b}{\sin^2 B}+\frac{\ell_c}{\sin^2 C}\ge 3$$

且等號成立的充要條件爲$\triangle ABC$爲正三角形。

問題四：設$\triangle A_1A_2A_3$中，$\angle A_3$是直角。由迭代過程我們可逐步定義出一系列的點，使得對每一正整數$n(\ge 3)$，點$A_{n+1}$是由點$A_n$到線段$\overline{A_{n-2}A_{n-1}}$之垂線的垂足。

($a$)如果持續不斷的進行這種過程，證明：存在唯一的一個點$P$，使得對每一正整數$n(\geq 3)$，$P$落在每一個$\triangle A_{n-2}A_{n-1}A_n$的內部。

(b)固定$A_1$與$A_3$兩點不動。當$A_2$在面上所有可能的位置變動時，試求所對應之點$P$的軌跡。

問題五：有$n$個人$A_1, A_2, \cdots, A_n\,(n\geq 3)$圍一圓圈而坐，設$A_i$有$a_i$個物件，而且

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=nN,$$

其中$N$爲一固定的正整數。假設$A_i$每次可傳給相鄰的$A_{i-1}$或$A_{i+1}$一個物件，亦可自相鄰的$A_{i-1}$或$A_{i+1}$獲得一個物件；其中$A_{n+1}=A_1, A_0=A_n$。爲了讓每一個人最後都有相同數量的物件，試問他們應如何傳遞才可使得傳遞的總次數爲最少？

## 貳、參考解答

問題一：(1) 設$\langle t_n\rangle$爲三角數所形成之數列，則

$$t_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ ,n=1,2,\cdots$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}&=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}\\&=2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\&=2\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=\frac{2n}{n+1}\end{aligned}$$

(2) 當 $t_n=1993006$時，$\dfrac{n(n+1)}{2}=1993006$, 得$n=1996$.

(3)

$$S=\sum_{n=1}^{1996}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{1996}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\left[1996+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)\right]$$

(4) 但

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1996}>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}>1+\left(\frac{1}{2}\times 10\right)=6.$$

因此

$$S=\frac{1}{2}〔1996+(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1996})〕>\frac{1}{2}〔1996+6〕=1001.$$

評注：*1.* 本題69位角逐前十名代表的競賽學生中有9位得滿分，得分率0.76，得分理想；最後前十名代表除了總共被扣3分外，幾乎都是滿分。

*2.* 在競賽中有多位學生不清楚本題中的〝三角數〞的意義而提出書面疑難要求解釋三角數的意義，亦經書面回答。

*3.* 多位被扣分的學生都因步驟⑷有書寫或書寫欠清所致。

*4.* 解法步驟⑷中 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1996}$ 之不等式估計可推廣到 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>1+\frac{m}{2}$ 其中 $2^m\leq k<2^{m+1}$，此爲建中高一學生陳明揚之附帶說明，提昇了本題的解題品質。

問題二：因爲 $n\mid 2^n+2$，所以 $n$ 爲奇數或 $n=2r$，$r$ 爲奇數。

⑴ 若 $n=2p$，$p$ 爲奇質數則

$$n\mid 2^n+2\Rightarrow 2^{4p-2}\equiv 1\ (\bmod\ p)....(*)$$

由費馬小定理得知

$$2^{p-1}\equiv\ (\bmod\ p)....(**)$$

綜合 $(*)$ 及 $(**)$ 得 $2^2\equiv 1\ (\bmod p)\Rightarrow p=3$（不合）

⑵ 若 $n=2pq,\ p\leq q$ 爲兩個奇質數

$$n\mid 2^n+2\Rightarrow 2^{4pq-2}\equiv 1\ (\bmod\ q).$$

因爲 $p,q$ 爲奇數質，所以 $p-1,\ q-1$ 皆爲偶數，故滿足

$$(p-1)(q-1)\mid 2(4pq-2)=8pq-4$$

的質數 $p,q$ 皆滿足 $2^{2n}\equiv 4(\bmod n),n=2qp.$

現在令

$$8pq-4=9(p-1)(q-1)\Rightarrow(p-9)(q-9)=68\Rightarrow p=11,q=43.$$

將 $n=2\times 11\times 43=946$ 代入檢驗得

$$\frac{2^{946}+2}{946}$$

亦爲正整數（檢驗時需依2,11,43及費馬小定理個別計算才容易看出）。因此 $n=946$ 爲所要的數。

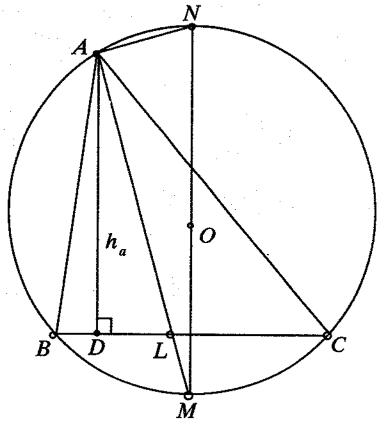
評注：本題屬高難度的數論問題，爲我國中學生較弱的主題，僅有2位學生得滿分，得分率最低。

問題三：

（解一）總部提供的參考答案

(1) 知道或導出

$$m_a^2=(AL)^2=bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$




(2) $h_a\cdot 2R=AL\cdot AM=m_a\cdot M_a$,

$$\frac{2(\triangle ABC)}{a}\cdot 2R=m_a\cdot M_a\ ,$$

$$\frac{\frac{abc}{4R}\cdot 4R}{a}=m_a\cdot M_a\ ,$$

$$bc=m_a\cdot M_a\ .$$

所以

$$\ell_a=\frac{m_a^2}{m_a\cdot M_a}=1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2$$

對 $\ell_b$ 及 $\ell_c$ 有類似的表示式

(3) 由正弦定理 $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得

$$\frac{\ell_a}{\sin^2A}+\frac{\ell_b}{\sin^2B}+\frac{\ell_c}{\sin^2C}$$

$$=\frac{4R^2}{a^2}\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]+\frac{4R^2}{b^2}\left[1-\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]+\frac{4R^2}{c^2}\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

$$=4R\left[\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(b+c)^2}\right)+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{(c+a)^2}\right)+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{(a+b)^2}\right)\right]$$

$$\geq 4R^2\left[\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4bc}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{4ca}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{4ab}\right]$$

$$=2R^2\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{2ab}-\frac{1}{2ca}-\frac{1}{2bc}\right]$$

$$\geq 2R^2\left[\frac{2}{ab}+\frac{2}{ca}+\frac{2}{bc}-\frac{1}{2ab}-\frac{1}{2ca}-\frac{1}{2bc}\right]$$

$$=2R^2\left[\frac{3}{2ab}+\frac{3}{2ca}+\frac{3}{2bc}\right]=3R^2\left[\frac{1}{ab}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{bc}\right]=3R^2\left[\frac{a+b+c}{abc}\right]$$

但$abc=4R\cdot(\triangle ABC)$，所以最後的式子變成

$$\frac{3R(a+b+c)}{4(\triangle ABC)}=\frac{3R\cdot 2s}{4sr}=3\cdot\frac{R}{2r}\geq 2r\quad（因爲R\geq 2r）$$

(4) 所有上述不等式等號成立的充要條件爲 $a=b=c$.

（解二）（雄中林耕賢、成功高中許哲偉）

(1) 注意 $\ell_a=\dfrac{m_a\cdot M_a}{M_a^2}=\dfrac{bc}{M_a^2}\geq\dfrac{bc}{(2R)^2}=\dfrac{bc}{4R^2}$

(2) $\dfrac{\ell_a}{sin^2A}\geq\dfrac{bc}{4R^2}\cdot\dfrac{4R^2}{a^2}=\dfrac{bc}{a^2}$

(3) 同理$\dfrac{\ell_b}{sin^2B}\geq\dfrac{ac}{b^2}$；$\dfrac{\ell_c}{\sin^2C}\geq\dfrac{ab}{c^2}$

(4) 由(2)(3)得證

$$\frac{\ell_a}{sin^2A}+\frac{\ell_b}{\sin^2B}+\frac{\ell_c}{\sin^2C}\geq\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}\cdot\frac{ac}{b^2}\cdot\frac{ab}{c^2}}=3$$

(5) 同解法(一)之(4)

評注：*1.* 解法(二)簡單扼要，解題品質頗高，雄中高一學生林耕賢用此法證明，成功高中許哲偉基本方法類似，都值得嘉許。

*2.* 本題爲三角幾何綜合在一起的不等式，爲近年來國際數學競賽的熱門題型；69位角逐學生中僅有18位得滿分，前十名的代表除一位未得分外其餘九位幾都得滿分。

問題四：

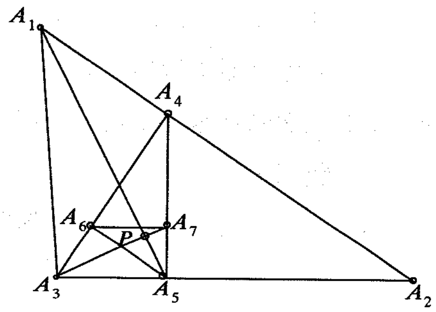
($a$) 首先，我們可以容易看出這些直角三角形$\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_3A_4A_5$, …都相似。

接著，我們證明$\triangle A_1A_3A_5\sim\triangle A_3A_5A_7$。因爲$\triangle A_2A_3A_4\sim\triangle A_4A_5A_6$（其高與邊長對應成比例）故

$$\frac{A_2A_3}{A_4A_5}=\frac{A_3A_5}{A_6A_7}.$$

又$\Delta A_3A_4A_5 \sim \Delta A_5A_6A_7$，故

$$\frac{A_4A_5}{A_6A_7}=\frac{A_3A_5}{A_5A_7}.$$




因此，

$$\frac{A_1A_3}{A_3A_5}=\frac{A_2A_4}{A_4A_5}=\frac{A_3A_5}{A_5A_7}.$$

故知$\Delta A_1A_3A_5 \sim \Delta A_3A_5A_7$.

令$P$爲$A_1A_5$與$A_3A_7$的交點。我們將證明$P$點是唯一合乎條件的點：因爲

$$90^\circ=\angle A_3A_5A_7=\angle PA_5A_7+\angle A_1A_5A_3=\angle PA_5A_7+\angle A_3A_7A_5,$$

故$\Delta PA_7A_5$爲一直角三角形且$\angle A_7PA_5=90^\circ$，即$A_1A_5$與$A_3A_7$互相垂直。同理，$A_3A_7$與$A_5A_9$互相垂直，$A_5A_9$與$A_7A_{11}$互相垂直。故知$A_1, A_5, A_9$三點共線且$A_3, A_7, A_{11}$三點共線。因此，$\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta A_9A_{10}A_{11}$爲位似（伸縮）三角形，且以$P$爲其位似中心。同理，$\Delta A_1A_2A_3$, $\Delta A_0A_{10}A_{11}$, $\Delta A_{17}A_{18}A_{10}$, …等都是以$P$爲其位似中心的位似三角形。因此除$P$點外不合乎條件的點。又顯然$P$點落在每一個$\Delta A_{n-2}A_{n-1}\ A_n$的內部，故得證。

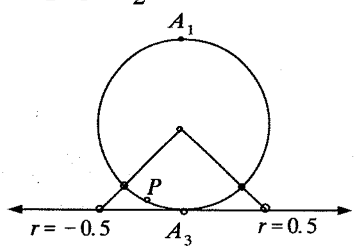
(b) 因爲$\angle A_1PA_3=90^\circ$，故$P$必落在以$A_1A_3$爲直徑的圓上。設$A_1A_3=1$, $A_2A_3=s$, $A_3A_5=r$。現在考慮$\Delta A_1A_2A_3$的頂點是依順時針 方向排成的。因爲$\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta A_3A_4A_5$，故$A_4A_5 : r=s:1$，得知$A_4A_5=rs$。又由畢氏定理知$A_3A_4=\sqrt{r^2+r^2s^2}=r\sqrt{1+s^2}$。故$\Delta A_1A_2A_3$的面積爲

$$\frac{1}{2}\overline{A_3A_4}\cdot\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+s^2}\cdot\sqrt{1+s^2}=\frac{1}{2}\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_2A_3}=\frac{1}{2}s.$$

因此，

$$r=\frac{s}{1+s^2}\le\frac{s}{2\sqrt{1\cdot s^2}}=\frac{1}{2}=0.5.$$

當$r\in(0,0.5]$.




因此，當$r=0.5$時，$\angle A_3A_1P$可達到最大值。若$\Delta A_1A_2A_3$的頂點是依逆時針方向排成的，則由對稱性可知，當$r=-0.5$時，$\angle A_3A_1P$可達到最大值。因

此，點$P$的軌跡是以$A_1A_3$爲直徑的圓上的兩個弧所構成（如圖兩弧以$A_3$爲分界點且另兩個極端點分別是對應於$r=0.5$與$r=-0.5$的位置）。

評注：1. 上面的參考答案爲總部提供，(b)之部分並不很完整（軌跡逆向未作充分完整說明）

2. 前十名代表中僅有五位答對(a)部分，只有陳明揚完全作答(b)，且解答品質很高。

問題五：(1) 這種傳遞可以表示爲$(x_1, x_2,...,x_n)$，其中$x_i$表示$A_i$傳給$A_{i+1}$物件的數量。所以我們的目的是求函數

$$F(x_1,x_2,...x_n)=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

的最小值。在傳遞結束時，每個$A_i$有$a_i-x_i+x_{i-1}=N$個物件，$\forall i=1,2,\cdots,n$；其中 $x_0=x_n$。

解此$n$元一次方程式可得

$$x_i=x_1-[(i-1)N-a_2-a_3-\cdots-a_i]\ \forall_i=1,2,\cdots,n.$$

因此，

$$F(x_1, x_2, ...,x_n)=|x_1|+|x_1-(N-a_2)|+|x_1-2N-a_2-a_3|+\cdots$$
$$+|x_1-[(n-1)N-a_2-a_3-\cdots-a_n]|$$

所以本問題可以等值的化爲下列函數的最小值

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-\alpha_i|,$$

其中

$$\alpha_i=(i-1)N-\sum_{j=2}^{i}a_j.$$

首先安排$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, n$爲非遞減之順序，再將相同的數值的$\alpha_i$蒐集在一起，按大小順序排列爲

$$\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_m,$$

使得$\beta_i$在$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$中有$k_i$項。因此$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$。考慮區間

$$(\ (\infty,\beta_1],\ [\beta_1,\beta_2],\cdots,\ [\beta_{m-1},\beta_m],\ [\beta_m,\infty)\ )$$

函數$F(x)=\sum_{i=1}^{n} k_i \mid x-\alpha_i \mid = \sum_{i=1}^{m} \mid x-\beta_i \mid$的圖形是由$m$個線段在端點連接而成，且$F(x)$可以表示爲

$$f(x)=\begin{cases} k_1(\beta_1-x)+k_2(\beta_2-x)+\cdots+k_m(\beta_m-x), 若x\in(-\infty,\beta_1], \\ k_1(x-\beta_1)+k_2(\beta_2-x)+\cdots+k_m(\beta_m-x), 若x\in[\beta_1,\beta_2], \\ \cdots \\ k_1(x-\beta_1)+k_2(\beta_2-x)+\cdots+k_m(x-\beta_m), 若x\in[\beta_m,\infty). \end{cases}$$

每個線段在每個區間上的斜率分別爲

$$s_0=-k_1-k_2-k_3-\cdots-k_m$$

$$s_1=k_1-k_2-k_3-\cdots-k_m$$

$$s_2=k_1+k_2-k_3-\cdots-k_m$$

$$\cdots$$

$$s_m=k_1+k_2+k_3+\cdots+k_m$$

我們觀察到$\{s_0, s_1,\ldots, s_m\}$是一個由負値遞增到正値的數列；所以存在一個$t\geq 1$，使得$s_t=0$或$s_{t-1}<0<s_t$。當$s_t=0$時，$F(x)$之最小値產生在$\beta_t$或$\beta_{t+1}$。當$s_{t-1}<0<s_t$時，$F(x)$之最小値產生在$\beta_t$。

評注：本題跟現行高中二年級數學統合第二册搬火柴盒的例題完全類似；高三理科學生理應已熟悉本題，但很意外地得分率卻不理想，顯示高中數學統合之科教學有待認眞檢討。 ☆