中學數學挑戰徵答題

通訊解題發掘數學資優生研究小組

＊本期徵答截止日期：民國86年5月7日；相關參考解答將刊於科學教育月刊第201期

問題編號 1031

設n為任意正整數，p為正整數。

試確定正整數p，使$1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$都是某個正整數的平方。

問題編號 1032

設$\triangle ABC$為一三角形。證明存在一直線l，使得以直線l為對稱軸，$\triangle ABC$的對稱三角形$\triangle A'B'C'$與原$\triangle ABC$的內部的共同部分（即內部的交集）的區域面積大於等於$\triangle ABC$面積的$\frac{2}{3}$。

問題編號 1033

實數x，y，z滿足$x^2+y^2+z^2=2$。

證明：$x+y+z-xyz\le 2$；並求出等號成立的所有對數(x,y,z)。

問題編號 1034

已知：〝若$x>-1$且$x\neq 0$，則對任意實數$a>1$，$(1+x)^a>1+ax$恆成立〞，（此不等式稱為Bernolli不等式）

證明：

⑴若$x>0$且$0<y<1$，則$x^y>\frac{x}{x+y}$。

⑵若$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{1998}$均為正數，則

$$(x_2+x_3+\cdots+x_{1998})^{x_1}+(x_1+x_3+\cdots+x_{1998})^{x_2}+\cdots+$$
$$(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_{1998})^{x_i}+\cdots+$$
$$(x_1+x_2+\cdots+x_{1997})^{x_{1998}}>1997$$

問題編號 1035

設一直線上有n個點標紅色，有n個點標藍色；證明：

所有同色點兩兩配對的距離總和不大於所有異色點兩兩配對的距離總和。 ☆