中學數學挑戰徵答題參考解答評析

通訊解題發掘數學資優生研究小組

問題編號 1016	解方程式$(\sum_{n=0}^{1991} x^n)\times(\sum_{n=0}^{1999} x^n)=(\sum_{n=0}^{1995} x^n)^2$。

解答： 1.$x=1$ 不是原方程式的解。

2.$\sum_{n=0}^{1991} x^n=1+x+x^2+\cdots+x^{1991}=\dfrac{1-x^{1992}}{1-x}\quad x\neq 1$

同理$\sum_{n=0}^{1999} x^n=\dfrac{1-x^{2000}}{1-x}$，$\sum_{n=0}^{1995} x^n=\dfrac{1-x^{1996}}{1-x}$

3.原方程式與$\dfrac{1-x^{1992}}{1-x}\times\dfrac{1-x^{2000}}{1-x}=(\dfrac{1-x^{1996}}{1-x})^2$同義，$x\neq 1$

因此得$(1-x^{1992})(1-x^{2000})=(1-x^{1996})^2$，且$x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^{1992}+x^{2000}=2x^{1996}$，且$x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^{1992}(x^8-2x^4+1)=0$，且$x\neq 1$

$\Leftrightarrow x=0$或$x^4=1$，且$x\neq 1$

$\Leftrightarrow x=0$或$x=\pm 1$或$x=\pm i$，且$x\neq 1$

4.所以原方程式的解$x=0$或-1或$\pm i$

〈解題重點〉

1.等比級數總和$\sum_{n=0}^{m} x^n=\dfrac{1-x^{m+1}}{1-x}$，$x\neq 1$，

也就是恆等式$x^{m+1}-1=(x-1)(x^m+x^{m-1}+\cdots+x+1)$。

2.多項式運算與因式分解。

3.刪除方程式的增根。

〈評析〉

1.本題配合高一基礎數學第一冊多項式題材命題，參與徵答的學生數最多，計有台師大附中何承遠等 89 位，得分率 0.90；高二、高三徵答者幾乎都得滿分。

2.部分徵答者直接展開，土法練鋼，博愛國小朱浩瑋之解法就是一例，精神可佳。

3.引用級數總和時，有些同學沒刪除 $x=1$ 的條件。

4.在多項式 $\sum_{k=0}^{n} x^k$ 中，未能明確了解 x^0 項即表示常數項的意義，因而將 $x=0$ 的根刪除，就配合現行高一基礎數學課本而言題目中宜指明 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n$。

問題編號 1017

任意三個不為零的實數 a，b，c，證明：

$$\left(\frac{a^2}{b^2c^2}+\frac{b^2}{c^2a^2}+\frac{c^2}{a^2b^2}\right)^2 \ge 3\left(\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}+\frac{1}{a^2b^2}\right)$$ 恒成立。

並求等號"="成立的充要條件。

解答：解法（一）

(1).為了簡化推演的過程，可設 $a^2=p$，$b^2=q$，$c^2=r$

此時 p,q,r 為三個正實數，且原命題轉化為證明：

$$\left(\frac{p}{qr}+\frac{q}{rp}+\frac{r}{pq}\right)^2 \ge 3\left(\frac{1}{qr}+\frac{1}{rp}+\frac{1}{pq}\right)$$

(2). $$\left(\frac{p}{qr}+\frac{q}{rp}+\frac{r}{pq}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2r^2}+\frac{q^2}{r^2p^2}+\frac{r^2}{p^2q^2}+2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

$$=\left(\frac{p^2}{q^2r^2}+\frac{1}{p^2}\right)+\left(\frac{q^2}{r^2p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\left(\frac{r^2}{p^2q^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}\right)+\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{p^2}\right)\right]$$

$$\ge 2\left(\sqrt{\frac{1}{q^2r^2}}+\sqrt{\frac{1}{r^2p^2}}+\sqrt{\frac{1}{p^2q^2}}\right)+\frac{1}{2}\times 2\left(\sqrt{\frac{1}{p^2q^2}}+\sqrt{\frac{1}{q^2r^2}}+\sqrt{\frac{1}{r^2p^2}}\right)$$

$$=3\left(\frac{1}{qr}+\frac{1}{rp}+\frac{1}{pq}\right)$$

所以原命題得證。

(3).在(2)中，"等號"成立的充要條件為

$$\begin{cases}\dfrac{p^2}{q^2r^2}=\dfrac{1}{p^2}\\ \dfrac{q^2}{r^2p^2}=\dfrac{1}{q^2}\\ \dfrac{r^2}{p^2q^2}=\dfrac{1}{r^2}\end{cases}，且\begin{cases}\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1}{q^2}\\ \dfrac{1}{q^2}=\dfrac{1}{r^2}\\ \dfrac{1}{r^2}=\dfrac{1}{p^2}\end{cases}$$，即 $p=q=r$，也就是 $|a|=|b|=|c|$。

解法（二）：（採自雄中林耕賢之解法。）

$\because \forall a',b',c'\in R$，我們恆有 $(a'-b')^2+(b'-c')^2+(c'-a')^2\geq 0$，

$\therefore a'^2+b'^2+c'^2\geq a'b'+b'c'+c'a'$，$\therefore (a'+b'+c')^2\geq 3(a'b'+b'c'+c'a')$

令 $a'=\dfrac{a^2}{b^2c^2}$，$b'=\dfrac{b^2}{c^2a^2}$，$c'=\dfrac{c^2}{a^2b^2}$，則

$$\left(\frac{a^2}{b^2c^2}+\frac{b^2}{c^2a^2}+\frac{c^2}{a^2b^2}\right)^2\geq 3\left[(\frac{1}{c^2})^2+(\frac{1}{a^2})^2+(\frac{1}{b^2})^2\right]\geq 3\left(\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}+\frac{1}{a^2b^2}\right)$$

若等號成立，則 $a'=b'=c'$ 且 $\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{b^2}$，

$\therefore a^2=b^2=c^2$，反之亦成立，$\therefore$ 充要條件為 $a^2=b^2=c^2$。

《解題重點》

1.利用代換法將複雜的代數式轉化成較簡單的式子。

2.$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 公式。

3.利用算幾不等式時，注意等號成立的條件。

《評析》

1.本題徵答者比預期人數少很多，高一徵答學生只達前道題之半，計有武陵高中黃世昌等 53 位；應與現階段高一學生處理代數的能力較弱有關，惟徵答者得分率堪稱理想。

2.部分同學“等號”成立的條件沒討論到。

3.部分同學引用“排序不等式”、“柯西不等式”或“左右相減”解之。

4.大部分同學沒有“簡化原代數式”，直接用較高次式解之；雄中林耕賢解題品質特佳。

問題編號 1018

若兩實數 α，β 滿足下列方程組：

$$\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+13\alpha-2006=0\\ \beta^3+3\beta^2+4\beta+1998=0\end{cases}$$

試確定$\alpha+\beta$之值。

解答：解法(一)：

由原方程組轉化得$\begin{cases}(\alpha-2)^3+(\alpha-2)-1996=0\\(\beta+1)^3+(\beta+1)+1996=0\end{cases}$

兩式相加得$(\alpha-2)^3+(\beta+1)^3+(\alpha+\beta-1)=0$

得$(\alpha+\beta-1)\left[(\alpha-2)^2+(\alpha-2)(\beta+1)+(\beta+1)^2+1\right]=0\cdots\cdots\cdots(*)$

又任意實數x,y，$x^2+xy+y^2+1=(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2+1>0$

所以(*)式必有$\alpha+\beta-1=0$的結果，即$\alpha+\beta=1$

解法(二)：

同解法(一)得$\begin{cases}(\alpha-2)^3+(\alpha-2)-1996=0\\(\beta+1)^3+(\beta+1)+1996=0\end{cases}\cdots\cdots\cdots(**)$

取函數$f(x)=x^3+x$，則易知$f(x)$為嚴格遞增的奇函數

由(**)式得$f(\alpha-2)=1996$

且$f(-(\beta+1))=-f(\beta+1)=1996$

所以$f(\alpha-2)=f(-(\beta+1))=1996$，即知$\alpha-2=-(\beta+1)$

所以$\alpha+\beta=1$。

解法（三）：（採自北一女中吳培甄之解法。）

$\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+13\alpha-2006=0\cdots\cdots\cdots①\\\beta^3+3\beta^2+4\beta+1998=0\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$

由勘根定理知：$14<\alpha<15$

$-14<\beta<-13$

把①式用$(\alpha-14)$表示：（用綜合除法）

得$(\alpha-14)^3+36(\alpha-14)^2+433(\alpha-14)-256=0$

設為$x^3+36x^2+433x-256=0\cdots\cdots\cdots③$

把②式用$(\beta+13)$表示：

得$(\beta+13)^3-36(\beta+13)^2+433(\beta+13)+256=0$

$y^3-36y^2+433y+256=0\cdots\cdots\cdots④$

若a為③式之一根，即$a^3+36a^2+433a-256=0$

則發現$(-a)$為④式之一根

即$(-a)^3-36(-a)^2+433(-a)+256=0$

$-a^3-36a^2-433a+256=0$

$\therefore \begin{array}{l} \alpha-14=a \\ \beta+13=-a \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha=a+14 \\ \beta=-a-13 \end{array}$，$\therefore \alpha+\beta=1$。

（評註：應如解（二）說出①或②之三次方程式都僅有一個實根）。

《解題重點》

1.$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$。

2.$x^2\pm xy+y^2\ge 0$，對任意實數 x,y 恆成立。

3.方程式轉化與變形。

4.解法(二)中，引進 $f(x)=x^3+x$ 為嚴格遞增奇函數，所以 $f(x)$ 為"一對一"函數，即 $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$。

《評析》

1.本題參與徵答者計有光仁中學羅俊傑等64位，本期五道題中得分率最高，高三徵答者都得滿分，可能與多一種"微分法"解題策略有關。

2.高三學生引"微分法"解之；部分同學用變數變換與比較係數法解之，亦有直接用"三次公式法"解題者。

問題編號 1019

設多項式函數 $f_1(x)=(x-2)^2$，$f_{k+1}(x)=(f_k(x)-2)^2$，$k=1,2,3,\cdots\cdots$ 令 $f_n(x)$ 展開式中，x 一次項的係數為 b_n，二次項的係數為 c_n。試求 b_n，c_n（n 為任意正整數）。（以 n 表示 b_n，c_n）。

解答：(1).令 $f_n(x)$ 展開式中，常數項、一次項、二次項的係數分別為 a_n，b_n，c_n，則由檢驗歸納易得

$a_n=4$，$b_n=-4^n$，$c_n=4c_{n-1}+(b_{n-1})^2=4c_{n-1}+4^{2(n-1)}$，$n\ge 2$

且 $c_1=1$。（由歸納法易證之）。

(2).現在由遞推法來求遞迴數列《c_n》的通式，

$$
\begin{aligned}
c_n &= 4c_{n-1}+4^{2(n-1)} \\
4c_{n-1} &= 4^2c_{n-2}+4^{2(n-2)}\times 4 \\
4^2c_{n-2} &= 4^3c_{n-3}+4^{2(n-3)}\times 4^2 \\
&\ \ \vdots \\
+)\,4^{n-2}c_2 &= 4^{n-1}c_1+4^{2\times 1}\times 4^{n-2}
\end{aligned}
$$

所以 $c_n=4^{n-1}\cdot c_1+4^{2n-2}+4^{2n-3}+4^{2n-4}+\cdots+4^n$

$$=4^{n-1}+4^n(1+4+4^2+\cdots\cdots+4^{n-2})$$

$$=4^{n-1}+\frac{4^n(1-4^{n-1})}{1-4}=\frac{4^{2n-1}-4^{n-1}}{3}$$

即 $c_n=\dfrac{4^{2n-1}-4^{n-1}}{3}$，$n\geq 2$ 且 $n=1$ 時亦成立（檢驗得之）

結論：$b_n=-4^n$，$c_n=\dfrac{4^{2n-1}-4^{n-1}}{3}$（任意正整數 n ）。

《解題重點》

1.了解 $f_n(x)$ 函數的定義法則。

2.多項式乘法。

3.由 $n=1,2,3$ 的乘積歸納出一次，二次項的通則。

4.求遞迴數列的通項。

5.歸納法。

《評析》

1.本題參與徵答人數僅次於第一道題，計有建中李國禎等 72 位，惟得分率略低，高二、高三徵答學生在本題的得分率都近滿分，顯示與知識思考成熟度有關。

2.部分同學直接引用"遞迴數列"公式解"c_n"的通式；亦有利用"微分法"解"c_n"的通式者。

問題編號 1020

在凸四邊形 $ABCD$ 中，K,M 分別為兩邊 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 內的點，但都不是端點。$\overline{AM}$ 與 $\overline{KD}$ 的交點為 L ，$\overline{KC}$ 與 $\overline{BM}$ 之交點為 N ，已知：$\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KB}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MD}}=t$ ，S_1,S_2 分別表示 ΔAMB 、ΔCKD ，而 S_3,S_4 及 S 分別表示四邊形 $AKMD$ 、四邊形 $KBCM$ 及四邊形 $ABCD$ 的面積。

（1） 試證：四邊形 $KLMN$ 的面積 $S_{KLMN}=\dfrac{t}{(t+1)^2}\dfrac{S_1S_2}{S_3S_4}S$ 。

（2） 當 K 、M 分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 的中點時，試確定 $3S_{KLMN}$ 與 S 的大小關係。

解答：（1）下列我們用兩種方法證之：

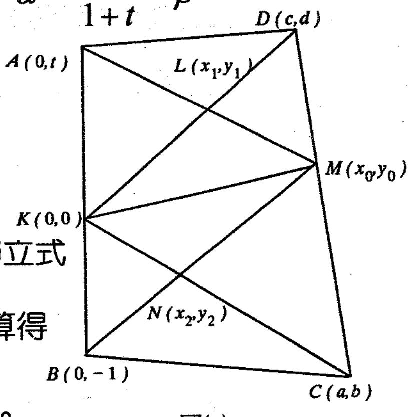
解法(一)用坐標幾何法證明

(i)首先建立一個面積公式：設 $P(0,0)$，$Q(a,b)$，$R(c,d)$，其中 $a\geq c>0$，

$d \ge b$，則ΔPQR的面積$=\dfrac{1}{2}(ad-bc)$。

(ii) 為了簡化處理過程，我們建立下面的坐標系，由已知 $\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KB}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MD}}=t$，不失一般性，取$K(0,0)$為原點，$A(0,t)$，$B(0,-1)$，$C(a,b)$，$D(c,d)$，其中$a,c>0$，如圖(一)，令$M(x_0,y_0)$，$L(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$則

$$\begin{cases} x_0=a+\dfrac{t}{1+t}(c-a)=\dfrac{1}{1+t}a+\dfrac{t}{1+t}c \\ y_0=b+\dfrac{t}{1+t}(d-b)=\dfrac{1}{1+t}b+\dfrac{t}{1+t}d \end{cases}，令\dfrac{1}{1+t}=\alpha，\dfrac{t}{1+t}=\beta$$



圖(一)

則$(x_0,y_0)=(\alpha a+\beta c,\alpha b+\beta d)$，$\alpha+\beta=1$

①L為$\overline{AM}$與$\overline{KD}$兩線的交點，

直線$\overline{AM}$的方程式為$(y-t)x_0=x(y_0-t)$

直線$\overline{KD}$的方程式為$yc=xd$，則$L(x_1,y_1)$為聯立式

$$\begin{cases}(y-t)(\alpha a+\beta c)=(\alpha b+\beta d-t)\\ yc=xd\end{cases}$$ 的解，由演算得

$$L(x_1,y_1)=(\frac{dt(\alpha a+\beta c)}{\alpha(ad-bc)+ct},\frac{ct(\alpha a+\beta c)}{\alpha(ad-bc)+ct})。$$

②N為$\overline{KC}$與$\overline{BM}$兩線的交點

直線$\overline{KC}$的方程式為$ya=xb$

直線$\overline{BM}$的方程式為$(y-1)x_0=x(y_0-1)$，即$N(x_2,y_2)$為聯立式

$$\begin{cases}ya=xb\\ (y-1)(\alpha a+\beta c)=x(\alpha b+\beta d+1)\end{cases}$$ 的解，由演算得

$$N(x_2,y_2)=(\frac{a(\alpha a+\beta c)}{\beta(ad-bc)+a},\frac{b(\alpha a+\beta c)}{\beta(ad-bc)+a})。$$

(iii)由(i)的三角形面積公式得

$$\Delta KLM的面積=\frac{1}{2}(x_0y_1-x_1y_0)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha a+\beta c)(\frac{dt(\alpha a+\beta b)}{\alpha(ad-bc)+c})-(\alpha b+\beta d)(\frac{ct(\alpha a+\beta b)}{\alpha(ad-bc)+ct})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha t(ad-bc)(\alpha a+\beta b)}{\alpha(ad-bc)+ct}\right]$$

ΔKNM 的面積$=\frac{1}{2}(x_2y_0-x_0y_2)$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{a(\alpha a+\beta c)(\alpha b+\beta d)}{\beta(ad-bc)+a}-\frac{b(\alpha a+\beta c)(\alpha a+\beta c)}{\beta(ad-bc)+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\beta(\alpha a+\beta c)(ad-bc)}{\beta(ad-bc)+a}\right]$$

ΔAMB 的面積 $S_1=\frac{1}{2}(t+1)x_0=\frac{1}{2}(t+1)(\alpha a+\beta c)$

ΔCDK 的面積 $S_2=\frac{1}{2}(ad-bc)$

四邊形 $AKMD$ 的面積 $S_3=(\Delta KMD+\Delta KDA)$ 的面積和

$$=\frac{1}{2}(x_0d-y_0c)+\frac{1}{2}ct$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha ad+\beta cd-\alpha bc-\beta cd+ct)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\alpha(ad-bc)+cy\right]$$

由 S_1,S_2 及 S_3 的關係得 $\frac{S_1S_2}{S_3}=\frac{1}{2}(t+1)(\alpha a+\beta c)(\frac{ad-bc}{\alpha(ad-bc)+ct})$

所以得到 $\frac{\Delta KLM}{\frac{S_1S_2}{S_3}}=\frac{t}{1+t}\alpha=\alpha(1-\alpha)$，即 $\Delta KLM=\alpha(1-\alpha)\frac{S_1S_2}{S_3}$

又四邊形 KBCM 的面積 $S_4=(\Delta KMC+\Delta KBC)$ 的面積和

$$=\frac{1}{2}(ay_0-bx_0)+\frac{1}{2}a\cdot 1$$

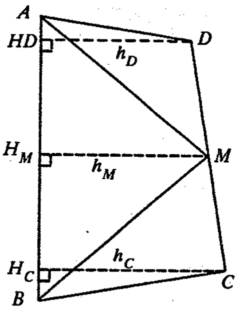
$$=\frac{1}{2}\left[a(\alpha b+\beta d)-b(\alpha a+\beta c)+a\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\beta(ad-bc)+a\right]$$

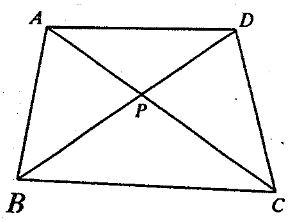
因此 $\frac{S_1S_2}{S_4}=\frac{1}{2}(t+1)(\alpha a+\beta c)(\frac{ad-bc}{\beta(ad-bc)+a})$

所以 $\frac{\Delta KNM}{\frac{S_1S_2}{S_4}}=\frac{1}{1+t}\beta$，即 $\Delta KNM=\alpha(1+\alpha)\frac{S_1S_2}{S_4}$

(iv)四邊形 KLMN 的面積 $S_{KLMN}=(\Delta KLM+\Delta KMN)$ 的面積和



圖(二)



圖(三)

$$=\alpha(1-\alpha)\left[\frac{S_1S_2}{S_3}+\frac{S_1S_2}{S_4}\right]$$

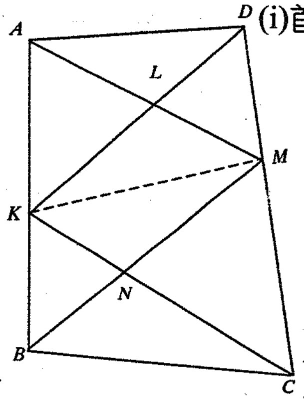
$$=\alpha(1-\alpha)S_1S_2\cdot(\frac{S_3+S_4}{S_3S_4})$$

$$=\alpha(1-\alpha)S_1S_2\cdot\frac{S}{S_3S_4}$$

$$=\frac{t}{(1+t)^2}\cdot\frac{S_1S_2}{S_3S_4}\cdot S$$

得證。

解法(二)用古典幾何法證明



圖(四)

(i)首先證明兩個幾何性質

(A)如圖(二)設 $\frac{\overline{DM}}{\overline{MC}}=\frac{n}{m}=t$，取 $\alpha=\frac{m}{m+n}$ ，$\beta=\frac{n}{m+n}=1-\alpha$

且 $\Delta ABD,\Delta ABC,\Delta BCD,\Delta ACD$ 的面積分別為 a,b,c,d 則

ΔAMB 的面積 $=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h_M=\frac{1}{2}(\frac{m}{m+n}h_D+\frac{n}{m+n}h_C)$

$$=\frac{\alpha}{2}\overline{AB}\cdot h_D+\frac{1-\alpha}{2}\overline{AB}\cdot h_C$$

$$=\alpha a+(1-\alpha)b$$

其中 h_D,h_M,h_C 分別為過 D,M,C 的高。

(B)如圖(三)四邊形的對角線交於 P ，則

(ΔBPC 與四邊形 $ABCD$)面積乘積=(ΔABC 與 ΔDBC)面積乘積

(由三角形面積公式與四邊形面積公式可證得) 。

(ii)由(i)的幾何性質(A)，我們可以得到下面幾個關係

①ΔAMB 的面積 $S_1=\alpha a+(1-\alpha)b$

ΔCKD 的面積 $S_2=\alpha c+(1-\alpha)d$

②四邊形 $KBCM$ 的面積 $S_4=(\Delta KMC+\Delta KBC)$ 的面積和

$$=\alpha(\Delta KCD\text{面積})+(1-\alpha)(\Delta ABC\text{面積})$$

$$=\alpha S_2+(1-\alpha)b$$

(iii) $\Delta AKM=\alpha\Delta ABM=\alpha S_1$ ，$\Delta DKM=(1-\alpha)\Delta DKC=(1-\alpha)S_2$

由幾何性質(B)得 $S_{\Delta KLM}\times S_3=\alpha S_1\cdot(1-\alpha S_2)$

所以$S_{\Delta KLM}=\alpha(1-\alpha)\dfrac{S_1S_2}{S_3}$，同理可證$S_{\Delta KNM}=\alpha(1-\alpha)\dfrac{S_1S_2}{S_4}$

又四邊形$KLMN$的面積$S_{KLMN}=(\Delta KLM+\Delta KMN)$的面積和

$$=\alpha(1-\alpha)\left[\frac{S_1S_2}{S_3}+\frac{S_1S_2}{S_4}\right]$$

$$=\alpha(1-\alpha)\frac{S_1S_2}{S_3S_4}\cdot(S_3+S_4)$$

$$=\alpha(1-\alpha)\frac{S_1S_2}{S_3S_4}\cdot S$$

$$=\frac{t}{(1+t)^2}\cdot\frac{S_1S_2}{S_3S_4}\cdot S$$

得證。

（2） 當K,M分別為$\overline{AB}$、$\overline{CD}$的中點時，$t=1$，由解法（一）或解法（二）的結果知$\dfrac{3S_{KLMN}}{S}=\dfrac{3}{4}\dfrac{S_1S_2}{S_3S_4}$，引用解法（二）的過程(ii)與(iii)知

$S_1=\dfrac{1}{2}(a+b)$，$S_2=\dfrac{1}{2}(c+d)$，$S_3=\dfrac{1}{2}(S_1+d)=\dfrac{1}{4}(a+b+2d)$，

$S_4=\dfrac{1}{2}(S_2+b)=\dfrac{1}{4}(c+d+2b)$，

因此，$\dfrac{3}{4}\dfrac{S_1S_2}{S_3S_4}=\dfrac{3(a+b)(c+d)}{(a+b+2d)(c+d+2b)}$，

$3S_{KLMN}<S\Leftrightarrow 3(a+b)(c+d)<(a+b+2d)(c+d+2b)$

$\Leftrightarrow 3(a+b)(c+d)-(a+b+2d)(c+d+2b)<0$

$\Leftrightarrow 2(a+b)(c+d)-\left[(a+b)\cdot 2b+(c+d)\cdot 2d+4bd\right]<0$

$\Leftrightarrow (a+b)(c+d)-(a+b)\cdot b-(c+d)\cdot d-2bd<0$

$\Leftrightarrow ac+bd+ad+bc-ab-b^2-cd-d^2-2bd<0$

$\Leftrightarrow (ab+cd-ac)+(b^2+d^2+bd-ad-bc)>0\cdots\cdots\cdots(*)$

由解法（二）之(i)(B)及圖（三）可得

(*1)：$ab+cd=(\Delta ABD)\times(\Delta ABC)+(\Delta BCD)\times(\Delta ACD)$

$=S\times(\Delta ABD)+S\times(\Delta CDP)=S\times(\Delta ABP+\Delta CDP)$

$>S\times(\Delta ABD$與ΔBCD中的較小者$)$

$=(a+c)\times(a$與c中的較小者$)>ac$

(*2)：$ad+bc=(\Delta ABD)\times(\Delta ACD)+(\Delta ABC)\times(\Delta BCD)$

$$= S\times(\Delta ADP)+S\times(\Delta BPC)=S\times(\Delta ADP+\Delta BPC)$$
$$\leq S\times(\Delta ABC\text{與}\Delta ACD\text{中的較大者})$$
$$=(b+d)\times(b\text{與}d\text{中的較大者})>b^2+d^2+bd$$

由(*1)與(*2)的關係，即可知(*)式必然成立，由此可知$3S_{KLMN}<S$。

《解題重點》

1.坐標幾何法坐標之建立。

2.直線方程式與直線交點坐標之代數演算能力。

3.三角形面積公式（如解法(一)之(i)，及$\frac{1}{2}$(底×高)）。

4.古典幾何法中之幾何性質（兩個面積公式解法(二)之(i)）。

5.四邊形分割成二個三角形便於求面積的關係式。

6.不等式比較法則：a,b均為正數，$a>b\Leftrightarrow\frac{a}{b}>1$。

7.不等式性質：$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$。

《評析》

1.本題得分率最低且參與徵答人數也最少，僅有雄中姜宜榮等 27 位，應與題目難度有關。

2.本命題大部分同學只證明第一部分，而且用逆推法證之，若本題改以“試用t,S_1,S_2,S_3,S_4表示S_{KLMN}的面積”可能就增加難度了。

3.武陵莊家勛，雄中蔡昇甫、姜宜榮、盧佑群，嘉中黃柏凱，中一中林宗茂，建中李國禎，證法互異，但解題品質都很高。

評註：

1.本次徵答統計簡表如下：

總人數 91 人	問題編號	1016	1017	1018	1019	1020
	得分	560	341	431	437	133
	徵答人數	89	53	64	72	27
	得分率	0.90	0.92	0.96	0.87	0.70
一年級 64 人	得分	390	210	263	288	69
	徵答人數	62	31	38	49	13
	得分率	0.90	0.97	0.99	0.84	0.76
二年級 17 人	得分	114	82	112	86	56
	徵答人數	17	12	16	13	10

	得分率	0.96	0.98	1.00	0.95	0.80
三年級　10人	得分	70	63	70	70	20
	徵答人數	10	10	10	10	4
	得分率	1.00	0.90	1.00	1.00	0.71
參與徵答總校數：18 所						
計：　計畫內：12 所，非計畫內：6 所						

2. 本期徵答題難度應稱合適，惟由於上學期末及農歷年假的關係，在截止期限前能參與徵答人數略少；高一學生徵答人數較多的學校為建中、雄中及武陵高中三所高中，且其解題品質亦佳，值得鼓勵。

3. 答題時間充裕時，很多學生解題時會嚐試各種解題途徑努力以赴，值得嘉許。在各種解題方法中，常發現學生品質甚佳者，所以通訊解題活動提供學生獨立研究與思想能力的培養的機會，是值得肯定的。

4. 本期徵答題數較多且答題品質較優異的學生計有：

高一：建中李國禎、鄧敦民、劉家聖、陳奕瑋、陳彥宏；台師大附中何承遠；武陵高中黃世昌、鍾隆興；新竹高中鍾其祥；台中一中林宗茂；台南一中梁東尼、謝書維、陳盈元、劉育廷；雄中姜宜榮、盧佑群、王俊傑、王紹宇、洪承龍、林耕賢、周稚傑等二十一位。

高二：板橋高中林穎志；武陵高中莊家勛、胡台威；彰化高中唐嘉宏；嘉中黃柏凱、蘇泓洸；雄中蔡昇甫；長榮中學蔡孟哲；協同高中蔡宇承等九位。

高三：建中余家偉；北一女陳思妤；台師大附中吳孟樵；武陵高中張明偉、彭彥碩、鍾招宏等六位。

5.學生心得感言摘錄如下：

①從一個題目表面並不能看出解題所需的方式，仔細觀察之後，發現所用到的觀念是多樣的，而遞迴數列實是解題的另一項工具！
解數學問題一方面需要解題的工具，另一方面要有解題經驗的培養及思考問題的想法，這些乃是吾人需要努力的方式。解題工具敏銳思考及解題經驗實是學習數學所不能缺少的。（姜宜榮，雄中）

②這次的五道題目大體上並不難。不過問題 1020 的第二小題我雖然有得出結果，但感覺上我用的代數方法似乎不太自然，因為我能證明 $KLMN$ 與 ΔALD 、ΔNBC 面積和相等，所以等於是要研究（ 2 ）圖中陰影部分面積（如圖（四）即ΔALK 、ΔDLM 、ΔKNB 與ΔMNC 四個三角形的區域）和大小與 $\frac{S}{3}$ 總面積的關係，希望有某種較為幾何性的作法。（蔡昇甫，雄中） ☆