三線性坐標與面積坐標(一)

趙文敏
國立台灣師範大學數學系

利用坐標方法討論幾何問題，直角坐標、斜角坐標、複數坐標與極坐標等，自然都很方便且有用。但是，這並不表示這些坐標在處理所有初等幾何問題時都最適合。事實上，在有關三角形的許多幾何性質的探討中，前面所提的各種坐標系，因爲都只使用一對實數做爲點的坐標，往往無法使三個頂點（或三邊）同時很對稱地得到兼顧。下面我們要介紹的兩種坐標系，正好可以彌補這種缺點，而使得一些有關三角形幾何問題的處理變得簡單漂亮。

甲、三線性坐標與面積坐標的基本概念

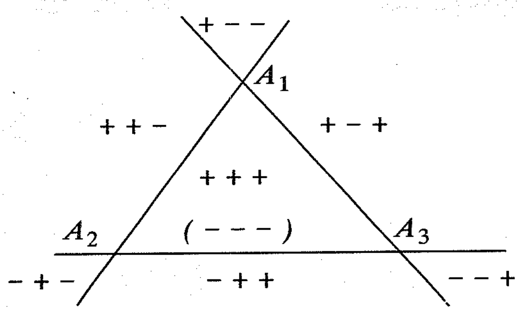
在平面上選定一個三角形$\triangle A_1A_2A_3$，其三邊長分別記爲a_1、a_2與a_3，三個內角分別記爲α_1, α_2與α_3而$s=(1/2)(a_1+a_2+a_3)$。對於平面上每個點P，我們考慮P至三直線A_2A_3、A_3A_1與A_1A_2的有向距離（*directed distance*）。這裡所謂有向距離，其意義如下：若點P與點A_1在直線A_2A_3的同側，則點P至直線A_2A_3的有向距離規定爲正數；若點P與點A_1在直線A_2A_3的異側，則點P至直線A_2A_3的有向距離規定爲負數；若點P在直線A_2A_3上，則點P至直線A_2A_3的有向距離規定爲0。點P至直線A_3A_1與A_1A_2的有向距離，分別以點A_2與A_3仿前述方法給以定義。

在下文中，對於平面上任意點P，點P至直線A_2A_3、A_3A_1與A_1A_2的垂足分別記爲P_1、P_2與P_3。

定義1：設$\triangle A_1A_2A_3$爲平面上一個三角形，P爲平面上任意點。若點P至直線A_2A_3、A_3A_1與A_1A_2的有向距離分別爲δ_1、δ_2與δ_3，則對每個非零實數k，有序三實數$(k\delta_1, k\delta_2, k\delta_3)$稱爲點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的一組齊次三線性坐標（*homogeneous trilinear coordinates*）或簡稱爲點P對$\triangle A_1A_2A_3$的一組三線性坐標（*trilinear coordinates*）。由此在平面上建立一個齊次坐標系，$\triangle A_1A_2A_3$稱爲此齊次坐標系的參考三角形（*triangle of reference*）。爲強調三線性坐標的齊次性，亦即：比值相同的三線性坐標表示相同的點，我們將點的三線性坐標寫成比值的形式：$P(k\delta_1 : k\delta_2 : k\delta_3)$。

根據定義1及前面的說明，三線性坐標系中各“象限”內坐標的正負狀況如下圖所

示：



圖一

在上圖中，+ + + 下面標示 (− − −)，乃是表示：若將該區域內的三線性坐標乘以任意負實數，則會由 + + + 變成 − − −。

例1：試證：參考三角形$\triangle A_1A_2A_3$的一些特殊點對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標如下：

⑴三頂點的三線性坐標：$A_1(1:0:0)$，$A_2(0:1:0)$，$A_3(0:0:1)$。

⑵三邊中點的三線性坐標：$O_1(0:1/a_2:1/a_3)$，$O_2(1/a_1:0:1/a_3)$，$O_3(1/a_1:1/a_2:0)$。

⑶重心G的三線性坐標：$G(1/a_1:1/a_2:1/a_3)$，或$G(\csc\alpha_1:\csc\alpha_2:\csc\alpha_3)$。

⑷內心I的三線性坐標：$I(1:1:1)$。

⑸三傍心的三線性坐標：$J^1(-1:1:1)$，$J^2(1:-1:1)$，$J^3(1:1:-1)$。

⑹三高的垂足的三線性坐標：

$$H_1(0:\cos\alpha_3:\cos\alpha_2), H_2(\cos\alpha_3:0:\cos\alpha_1), H_3(\cos\alpha_2, \cos\alpha_1, 0)$$

⑺垂心H的三線性坐標：$H(\cos\alpha_2\cos\alpha_3:\cos\alpha_3\cos\alpha_1:\cos\alpha_1\cos\alpha_2)$。

⑻外心O的三線性坐標：$O(\cos\alpha_1:\cos\alpha_2:\cos\alpha_3)$。

⑼內心至三邊的垂足的三線性坐標：

$$I_1(0:a_3(s-a_3):a_2(s-a_2)), I_2(a_3(s-a_3):0:a_1(s-a_1)), I_3(a_2(s-a_2):a_1(s-a_1):0)。$$

⑽傍心至含三邊之直線的垂足的三線性坐標：

$$J_1^1(0:a_3(s-a_2):a_2(s-a_3)), J_2^1(-a_3(s-a_2):0:a_1s), J_3^1(-a_2(s-a_3):a_1s:0);$$

$$J_1^2(0:-a_3(s-a_1):a_2s), J_2^2(a_3(s-a_1):0:a_1(s-a_3)), J_3^2(a_2s:-a_1(s-a_3):0);$$

$$J_1^3(0:a_3s:-a_2(s-a_1)), J_2^3(a_3s:0:-a_1(s-a_2)), J_3^3(a_2(s-a_1):a_1(s-a_2):0)。$$

證：我們只以⑹中的H_1與⑼中的I_1為例。

設$\alpha_3<\pi/2$，如圖2(a)所示，則H_1至直線A_3A_1的有向距離為$\overline{A_1H_1}\sin\angle H_1A_1A_3$而$\angle H_1A_1A_3=\pi/2-\alpha_3$。於是，此有向距離為$\overline{A_1H_1}\cos\alpha_3$。設$\alpha_3>\pi/2$，如圖2(b)

所示，則H_1至直線A_3A_1的有向距離為$-\overline{A_1H_1}sin\angle H_1A_1A_3$，而$\angle H_1A_1A_3=\alpha_3-\pi/2$。於是，此有向距離為$\overline{A_1H_1}\cos\alpha_3$。同理，$H_1$至直線$A_1A_2$的有向距離為$\overline{A_1H_1}\cos\alpha_2$。因此，點$H_1$對$\triangle A_1A_2A_3$的三線性坐標為（$0:\overline{A_1H_1}\cos\alpha_3:A_1H_1\cos\alpha_2$）或寫成（$0:\cos\alpha_3:\cos\alpha_2$）。

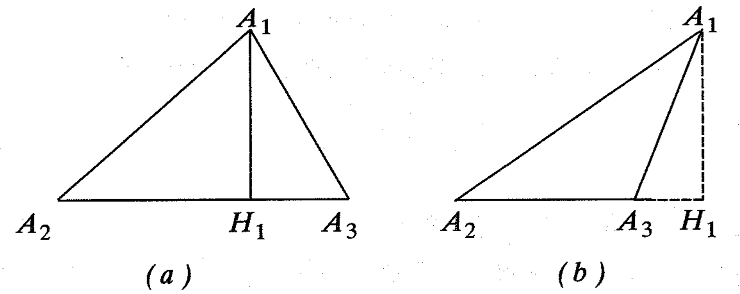


圖2

因為$\overline{I_1A_3}=s-a_3$，所以，點I_1至直線A_3A_1的有向距離為$(s-a_3)\sin\alpha_3$。同理，點I_1至直線A_1A_2的有向距離為$(s-a_2)\sin\alpha_2$。另一方面，依正弦定律，可知$\sin\alpha_2=a_2/(2R)$且$\sin\alpha_3=a_3/(2R)$，其中，R是$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓半徑。於是，點I_1的三線性坐標為$(0:a_3(s-a_3)/(2R):a_2(s-a_2)/(2R))$或$(0:a_3(s-a_3):a_2(s-a_2))$。‖

仿照三線性坐標的概念，我們可以定義另一種與三角形幾何密切相關的坐標系。

設$\triangle A_1A_2A_3$為平面上一個三角形。對於平面上每個點P，我們考慮$\triangle PA_2A_3$、$\triangle PA_3A_1$與$\triangle PA_1A_2$的有向面積。這裡所謂的有向面積（*directed area*），其意義如下：若$\triangle PA_2A_3$中由P至A_2至A_3的方向是逆時針方向（*counterclockwise direction*），則$\triangle PA_2A_3$的有向面積規定為正數；若$\triangle PA_2A_3$中由P至A_2至A_3的方向是順時針方向（*clockwise direction*），則$\triangle PA_2A_3$的有向面積規定為負數。若P、A_2與A_3三點共線，則$\triangle PA_2A_3$的有向面積規定為0。$\triangle PA_3A_1$與$\triangle PA_1A_2$的有向面積，可以仿前述方法給以定義。

定義2： 設$\triangle A_1A_2A_3$為平面上一個三角形，而P為平面上任意點。若$\triangle PA_2A_3$、$\triangle PA_3A_1$與$\triangle PA_1A_2$的有向面積分別為σ_1、σ_2與σ_3，則對每個非零實數k，有序三實數$(k\sigma_1,k\sigma_2,k\sigma_3)$稱為點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的一組面積坐標（*areal coordinates*），由此在平面上建立一個齊次坐標系，$\triangle A_1A_2A_3$稱為此齊次坐標系的參考三角形（*triangle of reference*）。

仿照三線性坐標的做法，面積坐標也寫成比值的形式：$P(k\sigma_1:k\sigma_2:k\sigma_3)$。若參考

三角形$\triangle A_1A_2A_3$中由A_1至A_2至A_3的方向是逆時針方向，則面積坐標系中各“象限”內坐標的正負狀況與圖1所表示者相同。

面積坐標的概念，乃是*Mobius*最先提出。他當時所考慮的問題是：對於$\triangle A_1A_2A_3$的平面上任意點P，三頂點A_1、A_2與A_3應放置何種質量，才能使點P成爲該質量系統的質量中心？根據這個問題的需要，三頂點的質量的比值，恰好是定義2所定義的面積坐標。因爲這個緣故，定義2的面積坐標也稱爲重心坐標（*barycentric coordinates*），這是*Mobius*所提出的名詞。

定理1（三線性坐標與面積坐標的關係）

設$\triangle A_1A_2A_3$爲一個三角形，其邊長分別爲a_1、a_2與a_3，而且由A_1至A_2至A_3的方向是逆時針方向。以$\triangle A_1A_2A_3$爲參考三角形，分別建立一個三線性坐標系及一個面積坐標系。設P爲平面上任一點。

(1)若$(\nu_1:\nu_2:\nu_3)$是點P對$\triangle A_1A_2A_3$的一組三線性坐標，則$(a_1\nu_1:a_2\nu_2:a_3\nu_3)$是點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的一組面積坐標。

(2)若$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$是點P對$\triangle A_1A_2A_3$的一組面積坐標，則$(\mu_1/a_1:\mu_2/a_2:\mu_3/a_3)$是點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的一組三線性坐標。

證：若點P至直線A_2A_3的有向距離爲δ_1，則$\triangle PA_2A_3$的有向面積爲$(a_1\delta_1)/2$。根據此性質，立即可得本定理的結果。‖

利用定理1的關係式及例1的結果，可得下述例子。

例2：試證：參考三角形$\triangle A_1A_2A_3$的一些特殊點對$\triangle A_1A_2A_3$的面積坐標如下：

(1)三頂點的面積坐標：$A_1(1:0:0)$，$A_2(0:1:0)$，$A_3(0:0:1)$。

(2)三邊中點的面積坐標：$O_1(0:1:1)$，$O_2(1:0:1)$，$O_3(1:1:0)$。

(3)重心G的面積坐標：$G(1:1:1)$。

(4)內心I的面積坐標：$I(a_1:a_2:a_3)$。

(5)三傍心的面積坐標：$J^1(-a_1:a_2:a_3)$，$J^2(a_1:-a_2:a_3)$，$J^3(a_1:a_2:-a_3)$。

(6)三高的垂足的面積坐標：

$H_1(0:\sin\alpha_2\cos\alpha_3:\sin\alpha_3\cos\alpha_2)$,$H_2(\sin\alpha_1\cos\alpha_3:0:\sin\alpha_3\cos\alpha_1)$,$H_3(\sin\alpha_1\cos\alpha_2:\sin\alpha_2\cos\alpha_1:0)$。

(7)垂心H的面積坐標：$H(\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3:\sin\alpha_2\cos\alpha_3\cos\alpha_1:\sin\alpha_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2)$。

(8)外心O的面積坐標：$O(\sin2\alpha_1:\sin2\alpha_2:\sin2\alpha_3)$。

(9)內心至三邊的垂足的面積坐標：

$I_1(0:s-a_3:s-a_2)$, $I_2(s-a_3:0:s-a_1)$, $I_3(s-a_2:s-a_1:0)$。

(10)傍心至含三邊之直線的垂足的面積坐標：

$J_1^1(0:s-a_2:s-a_3)$, $J_2^1(-(s-a_2):0:s)$, $J_3^1(-(s-a_3):s:0)$;

$J_1^2(0:-(s-a_1):s)$, $J_2^2(s-a_1:0:s-a_3)$, $J_3^2(s:-(s-a_3):0)$;

$J_1^3(0:s:-(s-a_1))$, $J_2^3(s:0:-(s-a_2))$, $J_3^3(s-a_1:s-a_2:0)$。

證：由例1及定理1立即可得，或仿例1自行計算。‖

定理2（三線性坐標與面積坐標的基本性質）

設參考三角形$\triangle A_1A_2A_3$的面積記爲Δ，三邊長分別爲a_1、a_2與a_3。

(1)若（$v_1:v_2:v_3$）爲任意點P對$\triangle A_1A_2A_3$的一組三線性坐標，則$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3$恆不爲0。

(2)若（$\mu_1:\mu_2:\mu_3$）爲任意點P對$\triangle A_1A_2A_3$的一組面積坐標，則$\mu_1+\mu_2+\mu_3$恆不爲0。

證：(1)設點P至直線A_2A_3、A_3A_1與A_1A_2的有向距離分別爲δ_1、δ_2與δ_3，則可得$a_1\delta_1+a_2\delta_2+a_3\delta_3=2\Delta$。另一方面，因爲（$v_1:v_2:v_3$）是點$P$ 的一組三線性坐標，所以，必可找到一個非零實數k，使得

$$v_1=k\delta_1,\quad v_2=k\delta_2,\quad v_3=k\delta_3。$$

於是，可得$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=2k\Delta$，此值不等於0。

(2)因爲$\mu_1+\mu_2+\mu_3=a_1(\mu_1/a_1)+a_2(\mu_2/a_2)+a_3(\mu_3/a_3)$，所以，欲證的性質依定理1(2)及前面的(1)立即可得。‖

對於任意點P，任選P對$\triangle A_1A_2A_3$的一組三線性坐標（$v_1:v_2:v_3$），令

$$\lambda_i=\frac{v_i}{a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3},\qquad i=1,2,3,$$

則（$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$）也是點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的一組三線性坐標，而且$a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3=1$。在點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的所有三線性坐標中，能滿足此等式者恰有一組，我們稱它是點P對$\triangle A_1A_2A_3$的規範化三線性坐標（*normalized trilinear coordinates*）。同理，任選點P對$\triangle A_1A_2A_3$的一組面積坐標（$\mu_1:\mu_2:\mu_3$），令

$$\lambda_i=\frac{\mu_i}{\mu_1+\mu_2+\mu_3},\qquad i=1,2,3,$$

則（$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$）也是點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的一組面積坐標，而且$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$。在點$P$對$\triangle A_1A_2A_3$的所有面積坐標中，能滿足此等式者恰有一組，我們稱它是點P對$\triangle A_1A_2A_3$的規範化面積坐標（*normalized areal coordinates*）。

定理3（將三線性坐標、面積坐標化為直角坐標）

在直角坐標平面上，設參考三角形$\triangle A_1A_2A_3$的頂點的直角坐標分別為$A_1(x_1,y_1)$、$A_2(x_2,y_2)$與$A_3(x_3,y_3)$。

⑴若（$\mu_1:\mu_2:\mu_3$）是點P對$\triangle A_1A_2A_3$的一組面積坐標，則點P的直角坐標（x,y）為

$$x=\frac{\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\ ,\ y=\frac{\mu_1y_1+\mu_2y_2+\mu_3y_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\text{。}$$

⑵若（$v_1:v_2:v_3$）是點P對$\triangle A_1A_2A_3$的一組三線性坐標，則點P的直角坐標（x,y）為

$$x=\frac{a_1v_1x_1+a_2v_2x_2+a_3v_3x_3}{a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3}\ ,\ y=\frac{a_1v_1y_1+a_2v_2y_2+a_3v_3y_3}{a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3}\text{。}$$

證：⑴若μ_1、μ_2與μ_3中有兩個等於0，則點P必是頂點A_1、A_2與A_3中之一。於是，定理的結論顯然成立。

若μ_1、μ_2與μ_3中恰有一個等於0，設$\mu_1=0$且$\mu_2\mu_3\neq 0$，則點P在直線A_2A_3上且$P\neq A_2$、$P\neq A_3$。因為$\triangle PA_3A_1$與$\triangle PA_1A_2$的有向面積之比為μ_2/μ_3，所以，向量$\overrightarrow{A_2P}$與$\overrightarrow{PA_3}$滿足$\overrightarrow{A_2P}=(\mu_3/\mu_2)\overrightarrow{PA_3}$或是

$$(x-x_2,y-y_2)=\frac{\mu_3}{\mu_2}(x_3-x,y_3-y)\text{。}$$

由此可得

$$x=\frac{\mu_2x_2+\mu_3x_3}{\mu_2+\mu_3}=\frac{\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\ ,$$

$$y=\frac{\mu_2y_2+\mu_3y_3}{\mu_2+\mu_3}=\frac{\mu_1y_1+\mu_2y_2+\mu_3y_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\text{。}$$

設$\mu_1\mu_2\mu_3\neq 0$。因為$\mu_1+\mu_2+\mu_3\neq 0$，所以，μ_1、μ_2與μ_3中必有二數的和不等0。設$\mu_2+\mu_3\neq 0$，則直線A_1P與A_2A_3不平行，設直線A_1P與A_2A_3交於點$Q(u,v)$。因為$\triangle QA_3A_1$與$\triangle QA_1A_2$的有向面積之比等於$\triangle PA_3A_1$與$\triangle PA_1A_2$的有向面積之比，而此比值等於μ_2/μ_3，所以，向量$\overrightarrow{A_2Q}$與$\overrightarrow{QA_3}$滿足$\overrightarrow{A_2Q}=(\mu_3/\mu_2)\overrightarrow{QA_3}$，或是

$$(u-x_2,\ v-y_2)=\frac{\mu_3}{\mu_2}\ (x_3-u, y_3-v)。$$

由此可得

$$u=\frac{\mu_2x_2+\mu_3x_3}{\mu_2+\mu_3}\quad ,v=\frac{\mu_2y_2+\mu_3y_3}{\mu_2+\mu_3}$$

其次，因爲$\triangle A_1A_2A_3$與$\triangle PA_2A_3$的有向面積之比等於$(\mu_1+\mu_2+\mu_3)/\mu_1$，所以，向量$\overrightarrow{A_1Q}$與$\overrightarrow{PQ}$滿足$\overrightarrow{A_1Q}=((\mu_1+\mu_2+\mu_3)/\mu_1)\overrightarrow{PQ}$，或是

$$(u-x_1, v-y_1)=\frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{\mu_1}(u-x\ ,\ v-y)。$$

由此可得

$$x=\frac{\mu_1x_1+(\mu_2+\mu_3)u}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}=\frac{\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\quad ,$$

$$y=\frac{\mu_1y_1+(\mu_2+\mu_3)v}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\quad =\frac{\mu_1y_1+\mu_2y_2+\mu_3y_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}$$

(2)依前面的(1)及定理1(1)立即可得。‖ ☆