在空間中尋求三角形垂心及外心的公式

邱坤毅

省立台東高級中學

一、前言：

現行高中數學教材關於三角形五心的介紹，重心在第一冊及第三冊均有提及，一般坊間的參考書在知空間三不共線相異點的坐標下，對於重心、內心、傍心都有公式的展現，唯獨對垂心及外心沒有，85年大學聯考自然組試題填充第七題：

題目為：$\triangle ABC$ 三邊長 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=2\sqrt{13}$，$\overline{CA}=4$ 且 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，若 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 則數對 $(x,y)=$ ______ 。

此題1乃改自課本第二冊202頁習題4－4第12題，原題為：

設 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=2\sqrt{7}$，$\overline{CA}=4$，$\overline{AB}=6$，O 為 $\triangle ABC$ 的外心令 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 試求 (x,y)？

出題者不出內心、重心、傍心，可能怕同學不知原理，以強記公式的方法解題。出外心、垂心就必須由基本原理出發，才合乎科學精神。

本文目的是在給予空間三角形三頂點的座標下，如何將三角形的外心、垂心公式化。尋找的過程中用到的數學知識只須高一三角學中的基礎原理及高二解聯立方程組的一些概念即可，希望此文對有興趣的中學生能有些助益。因筆者學識有限，疏漏與不智處，期盼諸位先進予以指正。

二、本文：

定理1：

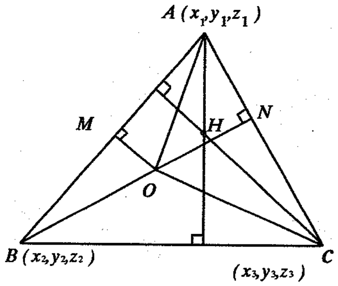
O 為 $\triangle ABC$ 的外心，P 為空間中的任意點

則 $\overrightarrow{PO}=\dfrac{\sin 2A\overrightarrow{PA}+\sin 2B\overrightarrow{PB}+\sin 2C\overrightarrow{PC}}{4\sin A\sin B\sin C}$

證明：見圖一 $\overleftrightarrow{OM}$，$\overleftrightarrow{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 的中垂線

1. 設 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



圖一

$\overline{AB}\cdot\overline{AO}\cdot\cos\angle BAO=C^2x+bc\cos Ay$

又 $\overline{AO}\cdot\cos\angle BAO=\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}C^2=C^2x+bc\cos Ay$

$\Rightarrow cx+b\cos Ay=\frac{1}{2}C$

同理 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot y\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow C\cos Ax+by=\frac{1}{2}b$

2.解 $\begin{cases} cx+b\cos Ay=\frac{1}{2}c \\ C\cos Ax+by=\frac{1}{2}b \end{cases}$，$\Delta=\begin{vmatrix} c & b\cos A \\ C\cos A & b \end{vmatrix}=bc(1-\cos^2A)=bc\sin^2A$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}c & b\cos A \\ \frac{1}{2}b & b \end{vmatrix}=\frac{b}{2}(c-b\cos A)$$

$$=\frac{1}{2}ab\cos B\ (\because a\cos B+b\cos A=c)$$

$\therefore x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{\frac{1}{2}ab\cos B}{bc\sin^2A}=\dfrac{a\cos B}{2\cdot a\sin C\sin A}=\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}$ （由正弦定律）

$(\because\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\ \therefore a\sin C=c\sin A)$

同理 $y=\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PA}=\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})$

$\Rightarrow\overrightarrow{PO}=\left(1-\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}-\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}\right)\overrightarrow{PA}+\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}\overrightarrow{PB}+\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}\overrightarrow{PC}$ —①

3.在基礎數學第二冊140頁習題8.(2)有一三角恆等式

$\sin2A+\sin2B+\sin2C=4\sin A\sin b\sin c$（可用和化積證得）

$(A+B+C=\pi)$

$\Rightarrow\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C=2\sin A\sin B\sin C$（同除以 $2\sin A\sin B\sin C$）

$\Rightarrow\dfrac{\cos A}{2\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}+\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}=1$

$\Rightarrow1-\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}-\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}=\dfrac{\cos A}{2\sin B\sin C}$ 代入①

$\Rightarrow\overrightarrow{PO}=\dfrac{\cos A\overrightarrow{PA}}{2\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B\overrightarrow{PB}}{2\sin A\sin C}+\dfrac{\cos C\overrightarrow{PC}}{2\sin A\sin B}$

$=\dfrac{\sin2A\overrightarrow{PA}+\sin2B\overrightarrow{PB}+\sin2C\overrightarrow{PC}}{4\sin A\sin B\sin C}$

定理2：

空間中$\triangle ABC$三頂點的坐標分別爲$A(x_1,y_1,z_1)$ $B(x_2,y_2,z_2,)$ $C(x_3,y_3,z_3)$則外心O的坐標爲：

$$\left(\frac{x_1 sin2A+x_2 sin2B+x_3 sin2C}{4sinAsinBsinC},\frac{y_1 sin2A+y_2 sin2B+y_3 sin2C}{4sinAsinBsinC},\frac{z_1 sin2A+z_2 sin2B+z_3 sin2C}{4sinAsinBsinC}\right)$$

或$\dfrac{(sin2A,sin2B,sin2C)}{4sinAsinBsinC}\begin{pmatrix} x1\ y1\ z1 \\ x2\ y2\ z2 \\ x3\ y3\ z3 \end{pmatrix}$

證明：承定理1，令$P=(0,0,0)$　設$O=(x,y,z)$

則$[x,y,z]=\dfrac{sinA[z_1,y_1,z_1]+sin2B[x_2,y_2,z_2]+sin2C[x_3,y_3,z_3]}{4sinAsinBsinC}$

比較分量即可得證。（見圖一）

定理3：

若H爲$\triangle ABC$的垂心，P爲空間中任意點

則$\overrightarrow{PH}=cotBcot\overrightarrow{PA}+cotCcotA\overrightarrow{PB}+cotAcotB\overrightarrow{PC}$

證明：1.（見圖一）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

同理$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$

設$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　另$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow cx+bcosAy=bcosA$　　$\Rightarrow ccosAx+by=ccosA$

2.解$\begin{cases} cx+bcosAy=bcosA \\ ccosAx+by=ccosA \end{cases}$ $\triangle=\begin{vmatrix} c & bcosA \\ ccosA & b \end{vmatrix}=bcsin^2A,\ \triangle x=\begin{vmatrix} bcosA & bcosA \\ ccosA & b \end{vmatrix}$

得$x=\dfrac{\triangle x}{\triangle}=\dfrac{abcosAcosC}{bcsin^2A}=\dfrac{acosAcosC}{asinCsinA}=cotAcotC=abcosAcosC$

$(\because csinA=asinC)$

同理可得$y=cotAcotB$

3.由1.，2.得$\overrightarrow{AH}=cotAcotC\overrightarrow{AB}+cotAcotB\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PH}-\overrightarrow{PA}=cotAcotC(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+cotAcotB(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})$

$$\Rightarrow PH=(1-cotAcotC-cotAcotB)\overrightarrow{PA}+cotCcotA\overrightarrow{PB}+cotAcotB\overrightarrow{PC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PH}=cotBcotC\overrightarrow{PA}+cotCcotA\overrightarrow{PB}+cotAcotB\overrightarrow{PC}$$

（$A+B+C=\pi$則$cotAcotB+cotBcotC+cotCcotA=1$，證明留給讀者試試看）

定理4：承定理2，垂心H的坐標爲

$$(x_1cotBcotC+x_2cotCcotA+x_3cotAcotB,y_1cotBcotC+y_2cotCcotA+y_3cotAcotB,$$
$$z_1cotBcotC+z_2cotCcotA+z_3cotAcotB)$$

或 $(cotBcotC,cotCcotA,cotAcotB)\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$

證明：令$P=(0,0,0)$, $H=(x,y,z)$代入定理3即可得證。

三、特殊化：

1. 已知直角三角形的外心在斜邊的中點，垂心在直角頂，

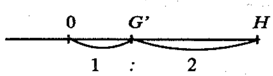
若$\angle A=90°$

由定理2：外心的x分量 $=\dfrac{x_2sin2B+x_3sin2C}{4sinBsinC}=\dfrac{x_2sin2B+x_3sin2B}{4sinBcosB}=\dfrac{x_2+x_3}{2}$

同理y分量 $=\dfrac{y_2+y_3}{2}$，z分量 $=\dfrac{z_2+z_3}{2}$

即外心爲$\overline{BC}$的中點

由定理4：$cotA=0$, $cotBcotC=cotBtanB=1$



圖二

即$H=(x_1,y_1,z_1)=A$，可知公式在直角三角形時是成立的。

2. 見圖二連$\overline{OH}$取內分點G'使$\overline{G'H}=2\overline{OG'}$

則G'的x分量爲

$$\frac{x_1cotBcotC+x_2cotCcotA+x_3cotAcotB+2\dfrac{x_1sin2A+x_2sin2B+x_3sin2C}{4sinAsinBsinC}}{1+2}$$

分子中x_1的係數爲：

$$cotBcotC+\frac{sin2A}{2sinAsinBsinC}=cotBcotC+\frac{cosA}{sinBsinC}$$

$$=cotBcotC-\frac{cos(B+C)}{sinBsinC}=cotBcotC-\frac{cosBcosC-sinBsinC}{sinBsinC}=1$$

同理x_2,x_2的係數皆爲1即G'的x分量爲$\dfrac{x_1+x_2+x_2}{3}$

同理y、z分量分別為$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$, $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$

因此$G'=G$，這證明了三角形O、G、H三點共線且$\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$，此線即是有名
（重心）
的$Euler$線

四、兩個例子：

例一：以前言中的聯考題為例：

解：$cosA=\frac{2^2+4^2-(\sqrt{13})^2}{2\times2\times4}=\frac{7}{16}\Rightarrow cotA=\frac{7}{3\sqrt{23}}$，同理$cotB=\frac{25}{3\sqrt{23}}$，$cotC=\frac{1}{3\sqrt{23}}$

由定理3的2°得$x=\frac{7}{3\sqrt{23}}\times\frac{1}{3\sqrt{23}}=\frac{7}{207}$，$y=\frac{7}{3\sqrt{23}}\times\frac{25}{3\sqrt{23}}=\frac{175}{207}$

例二：$A(1,2,1)$，$B(1,4,3)$，$C(-3,0,1)$則$\triangle ABC$的垂心H與外心O的坐標為何？

解：$\overline{AB}=2\sqrt{2}$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=2\sqrt{5}$（$(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5})^2<6^2$，$\triangle ABC$是鈍角$\triangle$）

$cosA=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$cosB=\frac{-1}{\sqrt{10}}$，$cosC=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow\begin{cases} sinA=\frac{1}{\sqrt{2}}，sinB=\frac{3}{\sqrt{10}}，sinC=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ cotA=1，cotB=-\frac{1}{3}，cotC=2 \\ sin2A=1，sin2B=-\frac{3}{5}，sin2C=\frac{4}{5} \end{cases}$$

由定理2、4可得$O=\left(\frac{-5}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$，$H=\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{-1}{3}\right)$

五、參考資料：

1. 民國85年大學聯考自然組試題。
2. 高中基礎數學第二冊（1994），國立編譯館。
3. 高中基礎數學第三冊（1994），國立編譯館。
4. 吳隆盛（1996），八十五年度聯招試題評析，科學月刊第27卷第10期，第861頁。☆